Розділ 1

Основи: логіка та методи доведення, множини

- Логіка висловлювань
- Логіка першого ступеня
- Логічне виведення в логіці висловлювань
- Метод резолюцій
- Правила виведення в численні предикатів
- Методи доведення теорем
- Множина. Кортеж. Декартів добуток
- Операції над множинами. Доведення рівностей із множинами
- Комп'ютерне подання множин

Логіку як науку, створену Арістотелем (384–322 до н. е.), упродовж століть використовували для розвитку багатьох галузей знань, зокрема філософії та математики. По суті, логіка — це наука про міркування, яка дає змогу визначити істинність або хибність математичного твердження, виходячи з первинних припущень, які називають аксіомами. Логіку також застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи й засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій.

Теорія множин і математична логіка — універсальна мова подальших розділів книги.

1.1. Логіка висловлювань

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно чи істинне, чи хибне, але не одне й інше водночас. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають *пропозиційною логікою* або *логікою висловлювань* [28, 52].

Приклад 1.1. Наведемо приклади речень.

1. Сніг білий.
2. Київ — столиця України.

3. $x + 1 = 3$.
4. Котра година?
5. Читай уважно!

Два перші речення — висловлювання, решта три — ні, бо третє речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, четверте та п'яте речення — не розповідні.

Значення „істина” чи „хибність”, яких набуває висловлювання, називають його *значенням істинності*. Значення „істина” позначають буквою T (від англ. „truth”), а „хибність” — буквою F (від „false”). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви з індексами чи без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають *атомарними формулами* чи *атомами*.

Приклад 1.2. Наведемо приклади висловлювань.

1. p: „Сніг білий”.
2. q: „Київ — столиця України”.

Тут символи p, q — атомарні формули.

Багато речень утворюють об'єднанням одного чи декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають *складним*. Побудову складних висловлювань уперше розглянуто 1845 р. в книзі англійського математика Дж. Буля (G. Boole) „The Laws of Truth”. Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою *логічних операцій*. У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій: *заперечення* (читають „не” та позначають знаком „$\neg$”), *кон'юнкцію* (читають „і (та)” й позначають знаком „$\wedge$”), *диз'юнкцію* (читають „або (чи)” та позначають знаком „$\vee$”), *імплікацію* (читають “якщо..., то” та позначають знаком „$\to$”), *еквівалентність* (читають „тоді й лише тоді” та позначають знаком „~”).

Приклад 1.3. Наведемо приклади складних висловлювань.

1. Сніг білий, і небо теж біле.
2. Якщо погода хороша, то ми їдемо відпочивати.

У наведених прикладах логічні операції — це „і” та „якщо..., то”.

Приклад 1.4. Розглянемо такі висловлювання: p: „Вологість велика”, q: „Температура висока”, r: „Ми почуваємо себе добре”. Тоді речення „Якщо вологість велика та температура висока, то ми не почуваємо себе добре” можна записати складним висловлюванням $((p \wedge q) \to (\neg r))$.

У логіці висловлювань атом p чи складне висловлювання називають *правильно побудованою формулою* або *формулою*. Вивчаючи формули, розглядають два аспекти — синтаксис і семантику.

Синтаксис — це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. *Формули* в логіці висловлювань означають за такими правилами:

- атом — це формула;
- якщо p — формула, то $(\neg p)$ — також формула;

♦ якщо p та q — формули, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \sim q)$ — формули;
♦ формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань указаних правил.

Формули, як і атоми, позначають малими латинськими буквами з індексами чи без них.

Приклад 1.5. Вирази $(p\to)$, $(p\wedge)$, $(p\neg)$, $(\vee q)$ — не формули.

Часто заперечення висловлювання p позначають також $\bar{p}$. Такий спосіб запису заперечення не потребує дужок. Якщо не виникає непорозумінь, то зовнішні дужки у формулах можна випускати.

Приклад 1.6. Формули $(p \vee q)$, $(p \to q)$ та $((p \wedge q) \to (\neg r))$ можна записати відповідно у вигляді $p \vee q$, $p \to q$ та $(p \wedge q) \to \bar{r}$.

Семантика — це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності. Нехай p та q — формули. Тоді значення істинності формул $(\neg p)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$ та $(p \sim q)$ так пов'язані зі значеннями істинності формул p та q.

1. Формула $(\neg p)$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли формула p істинна. Формулу $(\neg p)$ читають „не p" чи „це не так, що p" та називають *запереченням формули p*.
2. Формула $(p \wedge q)$ істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула $(p \wedge q)$ хибна. Формулу $(p \wedge q)$ читають „p і q" й називають *кон'юнкцією* формул p та q.
3. Формула $(p \vee q)$ хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках $(p \vee q)$ істинна. Формулу $(p \vee q)$ читають „p або q" й називають *диз'юнкцією* формул p та q.
4. Формула $(p \to q)$ хибна, якщо формула p істинна, а q — хибна. У всіх інших випадках вона істинна. Формулу $(p \to q)$ називають *імплікацією*, атом p — *припущенням імплікації*, а q — її *висновком*. Оскільки імплікацію використовують у багатьох математичних міркуваннях, то існує багато термінологічних варіантів для формули $(p \to q)$. Ось деякі з них: „якщо p, то q", „з p випливає q", „p лише тоді, коли q", „p достатнє для q", „q, якщо p", „q необхідне для p".
5. Формула $(p \sim q)$ істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула $(p \sim q)$ хибна. Формулу $(p \sim q)$ читають „p тоді й лише тоді, коли q" чи „p еквівалентне q" та називають *еквівалентністю* формул p та q.

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць, які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Такі таблиці називають *таблицями істинності*. Семантику введених операцій у формі таблиць істинності наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$(p \sim q)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Приклад 1.7. Знайдемо заперечення висловлювання „Сьогодні п'ятниця". Воно має вигляд „Це не так, що сьогодні п'ятниця". Це речення також можна сформулювати як „Сьогодні не п'ятниця" чи „П'ятниця не сьогодні". Зазначимо, що речення, пов'язані з часовою змінною, — не висловлювання доти, доки не визначено момент часу. Це стосується й змінних у реченнях, які характеризують місце чи особу. Ці речення — не висловлювання, якщо не зазначено відповідного місця чи конкретної особи.

Приклад 1.8. Знайдемо кон'юнкцію висловлювань p та q, де p — висловлювання „Сьогодні п'ятниця", а q — „Сьогодні падає дощ". Кон'юнкція цих висловлювань — „Сьогодні п'ятниця, і сьогодні падає дощ". Воно істинне в дощову п'ятницю й хибне в інший день або в недощову п'ятницю.

Приклад 1.9. Що являє собою диз'юнкція висловлювань p та q з прикладу 1.8? Диз'юнкція висловлювань p та q — висловлювання „Сьогодні п'ятниця чи сьогодні падає дощ". Воно істинне в будь-яку п'ятницю чи в будь-який дощовий день (зокрема, у дощову п'ятницю) і хибне тільки в недощові „не п'ятниці".

Логічна операція „диз'юнкція" відповідає одному з двох способів уживання слова „чи (або)" в українській мові. Диз'юнкція істинна, якщо істинне принаймні одне з двох висловлювань. Розглянемо речення „Лекції з логіки можуть відвідувати студенти, які прослухали курси математичного аналізу чи дискретної математики". Його зміст полягає в тому, що лекції можуть відвідувати як студенти, які прослухали обидва курси, так і ті, хто прослухав тільки один із них. Але є й інше, *альтернативне „чи (або)"*. Розглянемо речення „Лекції з логіки мають відвідувати студенти, які прослухали тільки один із двох курсів — математичного аналізу чи дискретної математики". Зміст цього речення полягає в тому, що студенти, які прослухали обидва ці курси, уже не повинні слухати лекції з логіки. Аналогічно, якщо в меню зазначено „Закуску чи салат подають із першою стравою", то це майже завжди означає, що з першою стравою буде подано чи закуску, чи салат, а не обидві страви. В останніх двох реченнях використано альтернативне „чи (або)"; його позначають знаком „$\oplus$". Значення істинності цієї операції наведено в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Імплікацію як логічну операцію називають також *умовним реченням*. Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв'язок обов'язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: „Якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку". Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають усіх завдань, то вони можуть отримати оцінку „відмінно", а можуть і не отримати її залежно від інших обставин. Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку „відмінно", то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації $p \to q$ припущення p „Ви виконаєте всі завдання" істинне, а її висновок q „Ви отримаєте відмінну оцінку" хибний.

Розуміння імплікації в логіці дещо відрізняється від його розуміння в природній мові. Наприклад, „Якщо буде сонячно, то ми підемо на пляж" — умовне речення, уживане у звичайній мові. Воно залишається істинним до того моменту, коли настане сонячний день, а ми не підемо на пляж. За означенням імплікації умовне речення „Якщо сьогодні п'ятниця, то $2 + 3 = 5$" істинне, бо висновок імплікації істинний. При цьому значення істинності припущення в імплікації тут не має відношення до висновку. Імплікація „Якщо сьогодні п'ятниця, то $2 + 3 = 6$" істинна щодня, крім п'ятниці, хоча висловлювання $2 + 3 = 6$ хибне. Останні дві імплікації ми не вживаємо в природній мові (хіба що як жарт), оскільки у кожному з відповідних умовних речень немає змістовного зв'язку між припущенням і висновком.

Конструкція „якщо p, то q", використовувана у вигляді „if p then q" в алгоритмічних мовах, відрізняється за змістом від імплікації в логіці. Тут p — висловлювання, а q — програмний сегмент, який складається з одного чи багатьох операторів. Програмний сегмент q виконується, якщо висловлювання p істинне, і не виконується, якщо воно хибне.

Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називають її *інтерпретацією*. Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлювання, потрібно знаходити значення логічних операцій, визначених табл. 1.1. Послідовність обчислень задають парами дужок. Якщо формула має n атомів, то є 2^n способів надати значення істинності її атомам, тобто така формула має 2^n інтерпретацій, а всі її значення можна звести в таблицю істинності з 2^n рядками. Формулу, яка містить n атомів, називають *n-місною*.

Формулу f називають *виконанною*, якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій f набуває значення T. У такому разі говорять, що формула f *виконується* в цій інтерпретації.

Приклад 1.10. Розглянемо формулу $(p \wedge q) \to (p \sim \bar{r})$. Позаяк кожному з атомів p, q й r можна надати два значення — F або T, то задана формула має $2^3 = 8$ інтерпретацій. Обчислимо значення істинності заданої формули для значень істинності атомів p, q та r, що відповідно дорівнюють T, T й F. Цим задано одну з інтерпретацій формули. Тоді формула $(p \wedge q)$ має значення T; $\bar{r}$ має значення T, позаяк r хибне; формула $(p \sim \bar{r})$ істинна, бо p та $\bar{r}$ істинні; нарешті, формула $((p \wedge q) \to (p \sim \bar{r}))$ істинна, оскільки $(p \wedge q)$ та $(p \sim \bar{r})$

істинні. Отже, задана формула виконується в цій інтерпретації, позаяк вона набуває значення T. Значення істинності формули $(p \wedge q) \to (p \sim \bar{r})$ у всіх її інтерпретаціях наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

p	q	r	$\bar{r}$	$(p \wedge q)$	$(p \sim \bar{r})$	$(p \wedge q) \to (p \sim \bar{r})$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T

Формулу f логіки висловлювань називають *загальнозначущою* чи *тавтологією*, якщо вона виконується в усіх інтерпретаціях. Якщо формула f — тавтологія, то використовують позначення $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях, називають *заперечуваною*, *невиконанною* чи *суперечністю*.

Оскільки кожна формула логіки висловлювань має скінченну кількість інтерпретацій, то завжди можна перевірити її загальнозначущість або заперечуваність, знайшовши значення істинності в усіх можливих інтерпретаціях.

Приклад 1.11. Розглянемо формулу $((p \to q) \wedge p) \to q$. Її атоми — p та q. Формула має $2^2 = 4$ інтерпретації. Значення істинності наведено в табл. 1.4. Ця формула істинна в усіх інтерпретаціях, тобто являє собою тавтологію.

Таблиця 1.4

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Приклад 1.12. Розглянемо формулу $(p \to q) \wedge (p \wedge \bar{q})$. З табл. 1.5 доходимо висновку, що вона хибна в усіх інтерпретаціях, тобто заперечувана.

Таблиця 1.5

p	q	$(p \to q)$	$\bar{q}$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \to q) \wedge (p \wedge \bar{q})$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Комп'ютери відображають інформацію за допомогою бітів. *Біт* має два можливі значення — 0 (нуль) і 1 (одиниця). Його можна використовувати для подання значень істинності T й F. Зазвичай 1 використовують для зображення T й 0 — для зображення F. Змінну називають *булевою*, якщо її значення — T чи F. Отже, булеві змінні можна подати за допомогою бітів.

Комп'ютерні операції над бітами відповідають логічним операціям. Замінивши T на 1, а F — на 0 у таблицях істинності для логічних операцій $\vee$, $\wedge$ та $\oplus$, отримаємо таблиці відповідних операцій над бітами. Ми будемо також використовувати нотацію OR, AND і XOR відповідно для логічних операцій $\vee$, $\wedge$ та $\oplus$, як у багатьох мовах програмування. Значення операцій OR, AND та XOR над бітами наведено в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

x	y	OR	AND	XOR
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Бітовим рядком називають скінченну послідовність бітів. Розглядають також рядок, який не містить жодного біта (*порожній рядок*). *Довжиною* бітового рядка називають кількість бітів у ньому. Наприклад, 110010100 — бітовий рядок довжиною дев'ять.

Операції над бітами можна узагальнити на бітові рядки. Означимо *порозрядне* OR, *порозрядне* AND і *порозрядне* XOR двох бітових рядків з однією довжиною як бітовий рядок, який має таку саму довжину, а його біти — відповідно результати операцій OR, AND і XOR над відповідними бітами цих рядків.

Приклад 1.13. Знайдемо результати операцій порозрядного OR, порозрядного AND і порозрядного XOR бітових рядків 1011000011 і 1101010101. Одержимо

1011000011
$\underline{1101010101}$
1111010111 — порозрядне OR
1001000001 — порозрядне AND
0110010110 — порозрядне XOR

1.2. Закони логіки висловлювань

Формули f і g називають *еквівалентними*, *рівносильними* чи *тотожними* (позначають $f = g$), якщо значення їх істинності збігаються в усіх інтерпретаціях цих формул. Властивість еквівалентності формул f і g можна сформулювати у вигляді такого твердження.

ТЕОРЕМА 1.1. Формули f і g еквівалентні тоді й лише тоді, коли формула $(f \sim g)$ загальнозначуща, тобто $\vDash f \sim g$.

Приклад 1.14. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $p \to q = \bar{p} \vee q$. Результати розв'язування задачі наведено в табл. 1.7.

Таблиця 1.7

p	q	$p \to q$	$\bar{p}$	$\bar{p} \vee q$	$(p \to q) \sim (\bar{p} \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Приклад 1.15. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $p \to q \neq q \to p$. Результати розв'язування задачі наведено в табл. 1.8.

Таблиця 1.8

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \sim (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Розглянемо еквівалентні формули, які задають правила перетворень. Такі еквівалентності називають *законами логіки висловлювань*. Перетворення виконують заміною якоїсь формули в складі іншої формули на еквівалентну їй формулу. Цю процедуру повторюють доти, доки не буде отримано формулу в потрібній формі. Основні закони логіки висловлювань наведено в табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Назва закону	Формулювання закону	
1. Закони комутативності	*а*) $p \vee q = q \vee p$;	*б*) $p \wedge q = q \wedge p$
2. Закони асоціативності	*а*) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$	
	б) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$	
3. Закони дистрибутивності	*а*) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
	б) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
4. Закон суперечності	$p \wedge \bar{p} = \mathrm{F}$	
5. Закон виключеного третього	$p \vee \bar{p} = \mathrm{T}$	
6. Закон подвійного заперечення	$\bar{\bar{p}} = p$	
7. Закони ідемпотентності	*а*) $p \vee p = p$;	*б*) $p \wedge p = p$
8. Закони де Моргана	*а*) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$;	*б*) $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
9. Закони поглинання	*а*) $(p \vee q) \wedge p = p$;	*б*) $(p \wedge q) \vee p = p$
10. Співвідношення для сталих	*а*) $p \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$;	*б*) $p \wedge \mathrm{T} = p$
	в) $p \vee \mathrm{F} = p$;	*г*) $p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$

Закони асоціативності дають змогу записувати багатомісні диз'юнкції та кон'юнкції без дужок.

За допомогою правил $p \to q = \bar{p} \lor q$ та $p \sim q = (p \to q) \land (q \to p)$ можна усувати логічні операції імплікації й еквівалентності з формул. Ці правила можна використовувати також для *введення* імплікації й еквівалентності.

Наведені еквівалентності можна перевірити, побудувавши таблиці істинності. Зокрема, у прикладі 1.14 доведено еквівалентність $p \to q = \bar{p} \lor q$, а приклад 1.15 показує, що імплікація не комутативна. Покажемо, як можна застосувати закони логіки висловлювань для доведення еквівалентності формул.

Приклад 1.16. Застосувавши закони логіки висловлювань, доведемо еквівалентність формул $p \to (q \land r)$ і $(p \to q) \land (p \to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів і правил:

$$p \to (q \land r) = \bar{p} \lor (q \land r)$$
(за правилом усунення імплікації)
$$= (\bar{p} \lor q) \land (\bar{p} \lor r)$$
(за законом дистрибутивності 3*а*)
$$= (p \to q) \land (p \to r)$$
(за правилом уведення імплікації).

Приклад 1.17. За допомогою законів логіки висловлювань доведемо еквівалентність формул $p \to q$ та $\bar{q} \to \bar{p}$. Цю еквівалентність називають *правилом контрапозиції*.

$$p \to q = \bar{p} \lor q$$
(за правилом усунення імплікації)
$$= q \lor \bar{p}$$
(за законом комутативності 1*а*)
$$= \bar{\bar{q}} \lor \bar{p}$$
(за законом подвійного заперечення 6)
$$= \bar{q} \to \bar{p}$$
(за правилом уведення імплікації).

1.3. Нормальні форми логіки висловлювань

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів — p, $\bar{q}$, r. Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{p, \bar{p}\}$ називають *контрарною*.

Говорять, що формулу f записано в *кон'юнктивній нормальній формі* (КНФ), якщо вона має вигляд $f = f_1 \land f_2 \land ... \land f_n$ $(n \geqslant 1)$, де кожна з формул $f_1, f_2, ..., f_n$ — літерал або диз'юнкція літералів і всі формули f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ різні.

Приклад 1.18. Нехай p, q й r — атоми. Тоді $f = (p \lor \bar{q} \lor \bar{r}) \land (\bar{p} \lor q)$ — формула, записана в КНФ. У ній $f_1 = (p \lor \bar{q} \lor \bar{r})$ і $f_2 = (\bar{p} \lor q)$, тобто f_1 — диз'юнкція літералів p, $\bar{q}$ й r, а f_2 — диз'юнкція літералів $\bar{p}$ та q.

Говорять, що формулу f записано в *диз'юнктивній нормальній формі* (ДНФ), якщо вона має вигляд $f = f_1 \lor f_2 \lor ... \lor f_n$ $(n \geqslant 1)$, де кожна з формул $f_1, f_2, ..., f_n$ — літерал або кон'юнкція літералів і всі f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ різні.

Приклад 1.19. Нехай p, q й r — атоми. Тоді $f = (\bar{p} \land q) \lor (p \land \bar{q} \land \bar{r})$ — формула, записана в ДНФ. У ній $f_1 = (\bar{p} \land q)$ й $f_2 = (p \land \bar{q} \land \bar{r})$; f_1 — кон'юнкція літералів $\bar{p}$ та q, а f_2 — кон'юнкція літералів p, $\bar{q}$ й $\bar{r}$.

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм, застосувавши закони логіки висловлювань. Для побудови нормальних форм потрібно виконати таку послідовність еквівалентних перетворень.

Крок 1. Застосувати правила $f \to g = \overline{f} \vee g$ й $f \sim g = (f \to g) \wedge (g \to f)$ (див. підрозділ 1.2) для усунення логічних операцій „$\to$” та „$\sim$”.

Крок 2. Застосувати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції (закон 3*а* з табл. 1.9). Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції (закон 3*б* з табл. 1.9).

Приклад 1.20. Побудуємо ДНФ формули $((p \vee \bar{q}) \to r) \wedge (\bar{r} \to s)$. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$((p \vee \overline{q}) \to r) \wedge (\overline{r} \to s) = (\overline{(p \vee \overline{q})} \vee r) \wedge (\overline{\overline{r}} \vee s)$$

(усунення логічної операції „$\to$”)

$$= ((\bar{p} \wedge \overline{\overline{q}}) \vee r) \wedge (r \vee s)$$

(закон де Моргана 8*а*)

$$= ((\bar{p} \wedge q) \vee r) \wedge (r \vee s)$$

(закон подвійного заперечення)

$$= ((\bar{p} \wedge q) \wedge (r \vee s)) \vee (r \wedge (r \vee s))$$

(закон дистрибутивності 3*б*)

$$= ((\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s)) \vee ((r \wedge r) \vee (r \wedge s))$$

(закон дистрибутивності 3*б*)

$$= (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s) \vee (r \wedge r) \vee (r \wedge s)$$

(закон асоціативності 2*а*)

$$= (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge s) \vee r \vee (r \wedge s)$$

(закон ідемпотентності 7*б*).

Ми одержали ДНФ. Її можна спростити, якщо двічі використати закон поглинання 9*б*: диз'юнктивний член r поглинає члени $(\bar{p} \wedge q \wedge r)$ і $(r \wedge s)$. Отже, $(\bar{p} \wedge q \wedge s) \vee r$ – інша ДНФ заданої формули. Останні міркування свідчать, що ДНФ, загалом кажучи, не єдина.

Приклад 1.21. Побудуємо КНФ формули $(p \wedge (q \to r)) \to s.$ Наведемо послідовність кроків і застосовані закони:

$$(p \wedge (q \to r)) \to s = \overline{(p \wedge (\overline{q} \vee r))} \vee s$$

(усунення логічної операції „$\to$”)

$$= (\overline{p} \vee (\overline{\overline{q} \vee r})) \vee s$$

(за законом де Моргана 8*б*)

$$= \overline{p} \vee (\overline{\overline{q} \vee r}) \vee s$$

(за законом асоціативності 2*а*)

$$= \overline{p} \vee (\overline{\overline{q}} \wedge \overline{r}) \vee s$$

(за законом де Моргана 8*а*)

$$= \overline{p} \vee (q \wedge \overline{r}) \vee s$$

(за законом подвійного заперечення 6)

$$= \overline{p} \vee s \vee (q \wedge \overline{r})$$

(за законом комутативності 1*а*)

$$= (\overline{p} \vee s) \vee (q \wedge \overline{r})$$

(за законом асоціативності 2*а*)

$$= (\overline{p} \vee q \vee s) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r} \vee s)$$

(за законом дистрибутивності 3*а*).

Ми одержали шукану КНФ.

1.4. Логіка першого ступеня

Як зазначено в розділі 1.1, існують речення, які не являють собою висловлювання та містять змінні. Було наведено приклад такого речення — „$x + 1 = 3$”. Речення зі змінними — це не висловлювання, але вони перетворюються на висловлювання, якщо надати змінним певних значень. Речення зі змінними дуже поширені. Вони містяться в математичних формулах і комп’ютерних програмах. Зокрема, у мовах програмування є оператори у вигляді „Повторити цикл доти, доки змінні x та y не стануть рівними, або припинити обчислення після 100 повторень”. Позначивши як i лічильник повторень, умову закінчення програми можна задавати виразом „$(x = y) \vee (i > 100)$”. Тоді оператор циклу набирає вигляду „повторювати, якщо $(\neg((x = y) \vee (i > 100)))$”.

Приклад 1.22. Речення „$x > 3$”, „$x = y + 3$”, „$x + y = z$” містять змінні. Вони не істинні й не хибні доти, доки змінним не буде надано якихось значень.

У наведеному прикладі речення „$x > 3$”, або, в іншому вигляді, „x більше 3”, складається з двох частин: першу, змінну x, називають *предметом*, а другу — „більше 3”, – яка показує властивість предмета, — *предикатом.* Часто предикатом називають усе речення.

Означимо *логіку першого ступеня* (*логіку предикатів*), у якій до понять логіки висловлювань додано нові поняття [28, 34]. Для формулювання складних думок у логіці висловлювань використовують атоми як основні елементи формул. Атом розглядають як неподільне ціле — його структуру та склад не аналізують. Позаяк багато міркувань неможливо описати лише за допомогою висловлювань, уведемо поняття атома в логіці першого ступеня. Для запису атомів логіки першого ступеня використовують такі типи символів:

- *індивідні символи,* або *сталі* — це імена об’єктів, які починаються з великої букви, та сталі, наприклад: Іван, Марія, Дискретна_математика, T, F, 2, 5;
- *предметні символи*, *предметні змінні*, або просто *змінні* — імена, якими позначають змінні та які записують малими буквами (можливо, з індексами), наприклад: x, y, z, v_i, w_j;
- *предикатні символи* — імена, якими позначають предикати та які записують великими буквами (наприклад, P, Q, R) або змістовними словами, які записують великими буквами (наприклад, *БІЛЬШЕ, ЛЮБИТЬ*).

Приклад 1.23. Позначимо речення „x більше 3” як $P(x)$, де предикатний символ P позначає предикат „більше 3”, а x — предметна змінна. Вираз $P(x)$ у цілому теж називають предикатом. Щоб записати твердження „x більше 3” як предикат, можна зробити інакше — означити предикат *БІЛЬШЕ*(x, y), який позначає „x більше y”. Тоді речення „x більше 3” можна записати як предикат *БІЛЬШЕ*$(x, 3)$.

Загалом, предикат, який містить n предметних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, записують $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ і називають *n-місним. Предметною областю змінної x_i* називають множину D_i її значень, а символ P — *n-місним предикатним символом.* Замість поняття „предикат” іноді використовують термін „*пропозиційна функція*”.

Атом логіки першого ступеня має вигляд $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, де P — предикатний символ, а $x_1, x_2, ..., x_n$ — предметні чи індивідні символи.

Щойно змінна x набуває якогось значення з предметної області, предикат $P(x)$ набуває значення T чи F і перетворюється на висловлювання. Аналогічно, якщо всі змінні багатомісного предиката набувають якихось значень, то він набуває значення істинності та перетворюється на висловлювання.

Приклад 1.24. Нехай вираз „$x + y = 2$" задано предикатом $Q(x, y)$. Тоді $Q(1, 2)$ — хибне висловлювання, а $Q(2, 0)$ — істинне. Позначимо це так: $Q(1, 2) = \mathrm{F}$, $Q(2, 0) = \mathrm{T}$.

Задамо речення „x любить y" предикатом *ЛЮБИТЬ*(x, y). Тоді істинне речення „Іван любить Марію" можна подати істинним висловлюванням *ЛЮБИТЬ*(Іван, Марія).

Приклад 1.25. Якщо *БІЛЬШЕ*(x, y) — предикат, означений у прикладі 1.23, то *БІЛЬШЕ*$(5, 3)$ — істинне висловлювання, а *БІЛЬШЕ*$(1, 3)$ — хибне.

Є й інший спосіб перетворення предиката у висловлювання — *квантифікація*. Нехай $P(x)$ — предикат, D — задана предметна область, $x \in D$. Використовують два спеціальні символи $\forall$ та $\exists$, які називають відповідно *кванторами загальності* й *існування*. Якщо x — предметна змінна, то вираз $(\forall x)$ читають „для всіх x", „для кожного x" або „для будь-якого x". Запис $(\forall x)P(x)$ означає „предикат $P(x)$ істинний для всіх значень x із предметної області"; його читають як „$P(x)$ для всіх x". Вираз $(\exists x)$ читають „існує x", „для деяких x" або „принаймні для одного x". Запис $(\exists x)P(x)$ має зміст „в області D існує таке x, що предикат $P(x)$ істинний", або „в області D існує принаймні одне x таке, що предикат $P(x)$ істинний", або „предикат $P(x)$ істинний для якогось x з області D". Дужки біля квантора можна випускати, тобто замість $(\forall x)$ та $(\exists x)$ писати відповідно $\forall x$ та $\exists x$.

Перехід від $P(x)$ до $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$ називають *зв'язуванням* предметної змінної x, а саму змінну x — *зв'язаною*. Незв'язану змінну називають *вільною*. Говорять, що у виразах $\forall xP(x)$ та $\exists xP(x)$ предикат $P(x)$ належить *області дії* відповідного квантора.

Приклад 1.26. У виразі $\exists xP(x, y)$ змінна x зв'язана, а змінна y — вільна, бо предикат $P(x, y)$ не належить області дії квантора зі змінною y.

Для пошуку значення істинності висловлювання, отриманого з пропозиційної функції зв'язуванням її змінних кванторами, потрібно знати предметну область.

Приклад 1.27. Нехай предикат $P(x)$ відповідає реченню „$x \geqslant 1$", а предметна область складається з усіх дійсних чисел. Тоді висловлювання $\forall xP(x)$ хибне: $\forall xP(x) = \mathrm{F}$. Якщо ж предметна область складається з усіх натуральних чисел, то висловлювання $\forall xP(x)$ істинне: $\forall xP(x) = \mathrm{T}$.

Правильно побудовані формули логіки першого ступеня, або *формули логіки першого ступеня*, означають так:

- атом — це формула;
- якщо H і G — формули, то $(\neg H)$, $(H \vee G)$, $(H \to G)$ та $(H \sim G)$ — формули;
- якщо H — формула, а x — вільна змінна у формулі H, то $\forall xH$ та $\exists xH$ — формули;
- формули можна породити тільки скінченною кількістю застосувань попередніх трьох правил.

Зазначимо, що замість $(\neg H)$ можна писати $\overline{H}$.

Наведемо приклади висловлювань, одержаних згідно з означенням формули логіки першого ступеня.

Приклад 1.28. Позначимо речення „x — просте число" як $P(x)$, „x — раціональне число" — як $Q(x)$, „x — дійсне число" — як $R(x)$ та „x менше y" — як $МЕНШЕ(x, y)$. Розглянемо такі істинні твердження.

1. Кожне раціональне число дійсне.
2. Існує просте число.
3. Для кожного числа x існує таке число y, що $x < y$.

Наведені речення можна записати такими формулами.

1. $\forall x\,(Q(x) \to R(x))$.
2. $\exists x\, P(x)$.
3. $\forall x\, \exists y\; МЕНШЕ(x, y)$.

Приклад 1.29. У формулі $\forall x\, \exists y\, МЕНШЕ(x, y)$ формула $МЕНШЕ(x, y)$ належить області дії квантора існування, а формула $\exists y\, МЕНШЕ(x, y)$ — області дії квантора загальності. Формула $(Q(x) \to R(x))$ належить області дії квантора загальності у формулі $\forall x\,(Q(x) \to R(x))$.

Зв'язування частини змінних багатомісного предиката перетворює його на предикат із меншою кількістю змінних. Зміст зв'язаних і вільних змінних у предикатах різний. Вільні змінні — це звичайні змінні, які можуть набувати різних значень із предметної області D; вираз $P(x)$ змінний, і його значення залежить від значення змінної x. Формули $\exists x P(x)$ та $\forall x P(x)$ не залежать від змінної x і для певних P та D мають конкретні значення. Це, зокрема, означає, що перейменування зв'язаних змінних, а саме, заміна $\forall x P(x)$ на $\forall y P(y)$, не змінює істинності формули.

Розглянемо приклади перекладу речень, записаних українською мовою, на мову предикатів і кванторів. Головна проблема такого перекладу полягає в правильному використанні кванторів. Кожне речення можна подати декількома способами, і не існує загального алгоритму, який дає змогу будувати його крок за кроком.

Приклад 1.30. Запишемо речення „Кожний студент групи вивчав дискретну математику" за допомогою предикатів і кванторів. Спочатку перепишемо речення так, щоб було зрозуміло, як краще розставити квантори: „Про кожного студента групи відомо, що цей студент вивчав дискретну математику". Тепер уведемо змінну x, і речення набере вигляду: „Про кожного студента x групи відомо, що x вивчав дискретну математику". Уведемо предикат $C(x)$: „x вивчав дискретну математику". Якщо предметна область змінної x — усі студенти групи, то можна записати задане речення як $\forall x C(x)$. Є й інші коректні подання з різними предметними областями та предикатами. Зокрема, можна вважати, що нас цікавлять інші групи людей, окрім тих, які вчаться в одній академічній групі. Узявши як предметну область усіх людей, можна записати задане речення так: „Для кожної особи x, якщо ця особа x — студент групи, то x вивчав дискретну математику". Якщо предикат $S(x)$ має вигляд „Особа x учиться в групі", то задане речення треба записати у вигляді $\forall x(S(x) \to C(x))$. Зауважимо, що задане речення не можна записати як $\forall x(S(x) \wedge C(x))$, бо тоді це означало б, що всі особи з предметної області вчаться в групі та вивчали дискретну математику.

Іще один спосіб записати задане речення — це ввести двомісний предикат $Q(x, y)$: „Студент x вивчає дисципліну y". Тоді можна замінити $C(x)$ на $Q(x,$ Дискретна_математика$)$, що дасть можливість переписати наведені формули у вигляді $\forall x Q(x$, Дискретна_математика) чи $\forall x(S(x) \to Q(x$, Дискретна_математика$))$.

Приклад 1.31. Запишемо речення „Деякі студенти групи відвідали Париж” за допомогою предикатів і кванторів. Це речення означає „У групі є такий студент, що цей студент відвідав Париж”. Якщо ввести змінну x, то задане речення можна переписати так: „У групі є такий студент x, що x відвідав Париж”. Уведемо предикат $M(x)$, який відповідає реченню „x відвідав Париж”. Якщо предметна область змінної x складається тільки зі студентів певної групи, то можна записати це речення як $\exists x M(x)$.
Якщо ж нас цікавлять інші особи, окрім студентів зазначеної групи, то перше із запропонованих речень матиме інший вигляд: „Є така особа x, що x — студент групи й x відвідав Париж”. У такому разі предметна область складається з усіх можливих людей. Нехай $S(x)$: „x — студент групи”. Тоді речення має такий вигляд: $\exists x(S(x) \wedge M(x))$, бо воно містить повідомлення про те, що хтось — студент групи та відвідав Париж. Це речення не можна подати формулою $\exists x(S(x) \to M(x))$, оскільки вона істинна навіть тоді, коли особа x — не студент групи.

Приклад 1.32. Запишемо речення „Кожний студент групи відвідав Париж або Рим” за допомогою предикатів і кванторів. Задане речення можна переписати так: „Для кожного x із групи відомо, що x відвідав Париж або x відвідав Рим”. Позначимо як $C(x)$ речення „x відвідав Париж”, а $M(x)$ — „x відвідав Рим”. Припустивши, що предметна область складається зі студентів певної групи, задане речення можна записати у вигляді $\forall x(C(x) \vee M(x))$. Якщо ж предметна область складається з усіх людей, то речення набере такого вигляду: „Для кожної особи x за умови, що x — студент групи, відомо, що особа x відвідала Париж або особа x відвідала Рим”. Це речення можна записати як $\forall x(S(x) \to (C(x) \vee M(x)))$.

Розглянемо приклади, які ілюструють подання речень природної мови та містять вкладені квантори, тобто в області дії одних кванторів є інші квантори.

Приклад 1.33. Нехай предметна область змінних x та y — усі дійсні числа. Речення $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ означає, що рівність $x + y = y + x$ — правило комутативності для суми дійсних чисел — правильна для всіх дійсних чисел x та y. Формула ж $\forall x\, \exists y(x + y = 0)$ означає, що для кожного дійсного числа x існує таке дійсне число y, що $x + y = 0$. Формула $\forall x \forall y \forall z\, (x + (y + z) = (x + y) + z)$ — це запис правила асоціативності для суми дійсних чисел.

Приклад 1.34. Перекладемо на українську мову формулу $\forall x \forall y(((x > 0) \wedge (y < 0)) \to (xy < 0))$, істинну для дійсних чисел x та y. Ця формула означає, що для дійсних чисел x та y таких, що x — додатне число, а y — від'ємне, їх добуток xy — від'ємне число. Це можна записати реченням „Добуток додатного та від'ємного дійсних чисел — від'ємне число”.

Переклад формул із вкладеними кванторами на українську мову може бути доволі складним. Він полягає у виписуванні змісту предикатів і кванторів, після чого потрібно переписати задану формулу реченням української мови.

Приклад 1.35. Подамо формулу $\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$ українською мовою, якщо $C(x)$ означає „x має комп'ютер”, $F(x, y)$ — „x та y — друзі”, а предметна область для x і для y — усі студенти певного курсу. Зміст формули можна так подати українською мовою: „Кожний студент курсу має комп'ютер або друга, у якого є комп'ютер”.

Приклад 1.36. Подамо формулу

$$\exists x \forall y \forall z((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \to \overline{F}(y, z))$$

українською мовою, якщо $F(a, b)$ означає, що a та b — друзі, а предметна область змінних x, y і z — усі студенти університету. Спочатку проаналізуємо формулу $((F(x, y) \wedge \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \bar{F}(y, z))$. Вона означає, що якщо x та y — друзі, x і z — друзі, а y і z — різні особи, то y і z — не друзі. У формулі кванторами зв'язано всі змінні. З урахуванням змісту кванторів задану формулу можна прочитати так: „Є студент, який дружить із двома групами студентів, котрі не дружать між собою". Така ситуація можлива для студента, який перейшов з одного факультету на інший.

Приклад 1.37. Подамо речення „Якщо певний чоловік — один із батьків, то він — тато" у вигляді формули логіки предикатів. Предметна область кожної змінної — усі люди. Переформулюємо задане речення так: „Для кожної особи x за умови, що x — чоловік та x — один із батьків, існує така особа y, що x — тато y". Увівши предикати $M(x)$: „x — особа чоловічої статі", $P(x)$: „x — один із батьків", $F(x, y)$: „x — батько y", можна записати задане речення так: $\forall x(((M(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y F(x, y))$.

Приклад 1.38. Подамо речення „Кожна людна має одного найкращого друга" формулою, яка містить предикатні символи, квантифіковані змінні, логічні операції, а предметна область складається з усіх людей. Задане речення переформулюємо так: „Для кожної особи x правильно, що особа x має точно одного найкращого друга". Якщо особа x має точно одного найкращого друга, то це означає, що існує єдина особа y, яка є найкращим другом x. Крім того, кожна особа z, відмінна від y, — не найкращий друг особи x. Уведемо предикат $B(x, y)$: „y — найкращий друг x". Тоді формулу, зміст якої полягає в тому, що людина x має точно одного найкращого друга, можна записати як $\exists y(B(x, y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \rightarrow \bar{B}(x, z)))$, а задане речення — як $\forall x\, \exists y\, (B(x, y) \wedge \forall z((z \neq y) \rightarrow \bar{B}(x, z)))$.

Приклад 1.39. Запишемо формулою логіки предикатів речення „Сума двох додатних чисел — додатне число". Спочатку перепишемо це речення так: „Два довільні додатні числа дають у сумі додатне число". Уведемо змінні x та y і отримаємо речення „Будь-які додатні числа x та y утворюють суму $x + y$, яка являє собою додатне число". Запишемо його формулою $\forall x\, \forall y\, (((x > 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (x + y > 0))$. Тут предметна область кожної змінної — усі дійсні числа.

Приклад 1.40. Запишемо речення „Кожне дійсне число, окрім нуля, має обернене" у вигляді логічної формули. Спочатку перепишемо це речення так: „Якщо число x дійсне та відмінне від нуля, то число x має обернене", — а потім — так: „Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що $xy = 1$". Останнє речення можна записати логічною формулою $\forall x\, ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\, (xy = 1))$.

1.5. Закони логіки першого ступеня

Еквівалентні формули логіки висловлювань залишаються такими й у логіці першого ступеня. Однак у логіці першого ступеня є еквівалентності (закони), пов'язані зі специфікою означення об'єктів логіки першого ступеня.

Дві формули логіки предикатів називають *еквівалентними*, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P та Q еквівалентні, то формула $P \sim Q$ — тавтологія, і навпаки. Еквівалентність формул P та Q записують як $P = Q$. Проблема побудови законів логіки першого ступеня полягає в доведенні еквівалентності формул P та Q. У логіці висловлювань еквівалентність можна перевірити, побудувавши відповіді таблиці істинності. У логіці першого ступеня аналогічна процедура загалом неможлива, бо предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, і повний перебір усіх їх значень неможливий.

Нижче наведено *основні закони логіки першого ступеня*. Зауважимо, що у формулах показано лише зв'язані змінні.

1. $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$.
2. $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$.
3. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$.
4. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.
5. $\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall x P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x\,(P(x) \vee Q) = \forall x\, P(x) \vee Q$.
7. $\exists x\,(P(x) \wedge Q) = \exists x\, P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x\,(P(x) \vee Q) = \exists x\, P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\, \forall y\, P(x, y) = \forall y\, \forall x\, P(x, y)$.
10. $\exists x\, \exists y\, P(x, y) = \exists y\, \exists x\, P(x, y)$.

Для доведення цих законів потрібні спеціальні методи. Проілюструємо це на прикладі доведення еквівалентності $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P}(x)$. Нехай для якогось предикатного символу P та предметної області D ліва частина еквівалентності істинна. Тоді не існує такого $a \in D$, для якого $P(a)$ істинне. Отже, для будь-якого a $P(a)$ хибне, а $\overline{P}(a)$ істинне; тому істинна права частина еквівалентності. Якщо ліва частина еквівалентності хибна, то існує таке $a \in D$, для якого $P(a)$ істинне, тобто права частина хибна. Аналогічно можна довести й закон $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P}(x)$.

Приклад 1.41. Проілюструємо еквівалентність $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P}(x)$. Розглянемо заперечення речення „Кожний студент університету вивчає математичний аналіз". Це речення можна записати за допомогою квантора загальності як $\forall x P(x)$, де $P(x)$ — речення „x вивчає математичний аналіз". Заперечення заданого речення — „Це не так, що кожний студент університету вивчає математичний аналіз"; воно еквівалентне реченню „Існує такій студент університету, який не вивчає математичного аналізу".

Приклад 1.42. Розглянемо речення „В університеті є студент, який вивчає математичний аналіз". Його можна записати як $\exists x P(x)$, де $P(x)$ — речення „x вивчає математичний аналіз". Заперечення заданого речення — „Це не так, що в університеті є студент, який вивчає математичний аналіз"; воно еквівалентне реченню „Кожний студент університету не вивчає математичного аналізу". Останнє отримують застосуванням квантора загальності до заперечення заданого речення, тобто $\forall x\, \overline{P}(x)$. Це ілюструє еквівалентність $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P}(x)$.

Доведемо закон $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$. Нехай ліва частина істинна для якихось P та Q, тобто для довільного $a \in D$ істинне $P(a) \wedge Q(a)$. Тому $P(a)$ та $Q(a)$ водночас істинні для довільного a, тобто $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ істинне. Якщо ж ліва частин хибна, то для якогось $a \in D$ хибне принаймні одне з висловлювань $P(a)$ чи $Q(a)$. Це означає, що хибне принаймні одне з висловлювань $\forall x P(x)$ або $\forall x Q(x)$, тобто хибна й права частина.

Аналогічно можна довести еквівалентність $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$.

Зазначимо, що в законах 9 і 10 змінні в предикатах зв'язані однаковими кванторами, тому можна переставляти їх без порушення еквівалентності. Якщо квантори різні, подібна еквівалентність виконується не завжди, тобто загалом $\forall x\exists yP(x, y) \neq \exists y\forall xP(x, y)$. Наведемо приклад, який ілюструє це зауваження.

Приклад 1.43. Розглянемо двомісний предикат $P(x, y)$: „$x \geqslant y$" на різних предметних областях. Формула $\exists x\forall yP(x, y)$ означає, що в предметній області існує максимальний елемент. Ця формула істинна на предметній області, що являє собою будь-яку скінченну підмножину множини цілих чисел, але хибна, наприклад, на множині $\{1/2, 2/3, 3/4, ..., n/(n + 1), ...\}$. Висловлювання $\forall y\exists xP(x, y)$ означає, що для довільного елемента y існує елемент x, не менший від y. Таке висловлювання істинне на довільній непорожній множині. Отже, переставлення кванторів існування та загальності може змінити зміст висловлювання та значення його істинності.

Якщо $D = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ — скінченна предметна область змінної x у предикаті $P(x)$, то можна скористатися логічними еквівалентностями $\forall xP(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ...$ $... \wedge P(a_n)$ та $\exists xP(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$. У такому разі заперечення квантифікованої формули дає той самий результат, що й застосування відповідного закону де Моргана. Це випливає з того, що

$$\overline{\forall xP(x)} = \overline{P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)} =$$
$$= \overline{P}(a_1) \vee \overline{P}(a_2) \vee ... \vee \overline{P}(a_n);$$

остання формула еквівалентна $\exists x\overline{P}(x)$.

Аналогічно,

$$\overline{\exists xP(x)} = \overline{P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)} =$$
$$= \overline{P}(a_1) \wedge \overline{P}(a_2) \wedge ... \wedge \overline{P}(a_n),$$

що еквівалентно $\forall x\overline{P}(x)$.

1.6. Випереджена нормальна форма

Говорять, що формулу логіки першого ступеня записано у *випередженій нормальній формі*, якщо вона має вигляд $Q_1x_1Q_2x_2 ... Q_nx_nM$, де кожне Q_ix_i $(i = 1, 2, ..., n)$ — це $\forall x_i$ або $\exists x_i$, а формула M не містить кванторів. Вираз $Q_1x_1 ... Q_nx_n$ називають *префіксом*, а M — *матрицею* формули, записаної у випередженій нормальній формі [34, 48].

Приклад 1.44. Наведемо приклади формул, записаних у випередженій нормальній формі.

1. $\forall x\forall y\, (P(x, y) \wedge Q(y))$.
2. $\forall x\exists y\, (\overline{P}(x) \vee Q(y))$.
3. $\forall x\forall y\exists z\, (Q(x, y) \wedge R(z))$.
4. $\forall x\exists y\forall z\, ((P(x, y) \vee Q(x, z)) \wedge \overline{R}(y, z))$.
5. $\forall x\forall y\forall z\exists u\, (\overline{P}(x, z) \vee \overline{P}(y, z) \vee Q(x, y, u))$.

Наведемо алгоритм зведення довільної формули логіки першого ступеня до випередженої нормальної форми.

Крок 1. Усунути з формули логічні операції „~” та „→” застосуванням еквівалентних формул $P \sim Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ та $P \to Q = \overline{P} \vee Q$.

Крок 2. Унести знак заперечення всередину формули безпосередньо до атома за допомогою таких законів:

- подвійного заперечення $\overline{\overline{P}} = P$;
- де Моргана $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$ та $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$;
- $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$ та $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$.

Перейменувати зв’язані змінні, якщо це потрібно,

Крок 3. Винести квантори в префікс, скориставшись законами 3–8 з підрозділу 1.5.

Приклад 1.45. Зведемо формулу $\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ до випередженої нормальної форми за умови, що предикати $P(x)$ і $Q(y)$ не містять вільних змінних. Наведемо послідовність формул, отриманих у процесі побудови випередженої нормальної форми:

$$\forall x P(x) \to \exists y Q(y) = \overline{\forall x P(x)} \vee \exists y Q(y)$$

(виключено логічну операцію „→”)

$$= \exists x \overline{P}(x) \vee \exists y Q(y)$$

(застосовано закон $\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P}(x)$)

$$= \exists x \exists y (\overline{P}(x) \vee Q(y))$$

(квантори існування винесено у префікс за законом 8 з підрозділа 1.5).

Приклад 1.46. Побудуємо випереджену нормальну форму для формули $\forall x \forall y (\exists z P(x, z) \wedge$ $\wedge P(y, z)) \to \exists u Q(x, y, u)$. Нижче подано процес побудови формули:

$$\forall x \forall y (\exists z (P(x, z) \wedge P(y, z)) \to \exists u Q(x, y, u)) = \forall x \forall y (\overline{\exists z (P(x, z) \wedge P(y, z))} \vee \exists u Q(x, y, u))$$

(виключено логічну операцію „→”)

$$= \forall x \forall y \left(\forall z \overline{(P(x,z) \wedge P(y,z))} \vee \exists u Q(x,y,u)\right)$$

(застосовано закон $\overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P}(x)$)

$$= \forall x \forall y (\forall z (\overline{P}(x,z) \vee \overline{P}(y,z)) \vee \exists u Q(x,y,u))$$

(застосовано закон де Моргана)

$$= \forall x \forall y \forall z \exists u (\overline{P}(x,z) \vee \overline{P}(y,z) \vee Q(x,y,u))$$

(за законами 6 та 8 підрозділа 1.5 у префікс формули винесено $\forall z$ та $\exists u$).

1.7. Логічне виведення в логіці висловлювань

Говорять, що формула g — *логічний наслідок* формул $f_1, f_2, ..., f_n$, або що g *логічно випливає* з $f_1, f_2, ..., f_n$, якщо в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n$, формула g також виконується. Формули $f_1, f_2, ..., f_n$ називають *гіпотезами* (*аксіомами*, *постулатами* чи *засновками*) формули g. Той факт, що формула g логічно випливає з $f_1, f_2, ..., f_n$, позначають $f_1, f_2, ..., f_n \vdash g$.

ТЕОРЕМА 1.2. Формула g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ загальнозначуща.

Доведення. Необхідність. Нехай g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ та I — довільна їх інтерпретація. Якщо формули $f_1, f_2, ..., f_n$ істинні в інтерпретації I, то за означенням логічного наслідку формула g також істинна в I. Звідси випливає, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ істинна в інтерпретації I. З іншого боку, якщо не всі формули з $f_1, f_2, ..., f_n$ істинні в інтерпретації I, тобто принаймні одна з них хибна в I, то формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ істинна в I. Отже, формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ істинна в довільній інтерпретації, або $\vDash ((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$.

Достатність. Припустимо, що формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ загальнозначуща. Тоді якщо формула $(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n)$ істинна в якійсь інтерпретації, то й формула g має бути істинною в цій інтерпретації, тобто g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$.

Якщо g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$, то формулу $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ називають *логічною теоремою*, а g — її висновком. У такому разі говорять, що формулу g можна *вивести* з формул $f_1, f_2, ..., f_n$ і g — *вивідна* формула. Вираз $f_1, f_2, ..., f_n \vdash g$ називають *правилом виведення*. Тут гіпотези записано зліва від знака $\vdash$, а висновок — справа; сам знак $\vdash$ має зміст „отже”.

ТЕОРЕМА 1.3 (принцип прямої дедукції). Формула g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли $(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \wedge \bar{g})$ — суперечність.

Доведення. За теоремою 1.2 формула g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ загальнозначуща. Отже, g — логічний наслідок формул $f_1, f_2, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли заперечення формули $((f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g)$ — суперечність. Справді,

$$\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n) \to g} = \overline{\overline{(f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n)} \vee g} =$$
$$= \overline{\overline{f_1} \vee \overline{f_2} \vee ... \vee \overline{f_n} \vee g} = f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \wedge \bar{g}.$$

Приклад 1.47. Розглянемо формули $f_1 = (p \to q)$, $f_2 = \bar{q}$, $g = \bar{p}$. Доведемо, що формула g — логічний наслідок формул f_1 і f_2.

Спосіб 1. Скористаємося таблицями істинності, щоб показати, що формула g виконується в кожній інтерпретації, у якій виконується формула $(p \to q) \wedge \bar{q}$. Із табл. 1.10 видно, що є лише одна інтерпретація, у якій $(p \to q) \wedge \bar{q}$ виконується, а саме $p = \text{F}$, $q = \text{F}$; у цій інтерпретації формула $\bar{p}$ також виконується. Отже, за означенням формула $\bar{p}$ — логічний наслідок формул $p \to q$ та $\bar{q}$.

Таблиця 1.10

p	q	$p \to q$	$\bar{q}$	$(p \to q) \wedge \bar{q}$	$\bar{p}$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

Спосіб 2. Скористаємося теоремою 1.2. Доведемо, що формула $(f_1 \wedge f_2) \to g$ загальнозначуща. Для цього побудуємо табл. 1.11 для формули $(f_1 \wedge f_2) \to g = ((p \to q) \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$.

Таблиця 1.11

p	q	$((p \to q) \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Оскільки формула $((p \to q) \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$ загальнозначуща, то формула $\bar{p}$ — логічний наслідок формул $p \to q$ та $\bar{q}$.

Спосіб 3. Скористаємося теоремою 1.3 та доведемо, що формула

$$(f_1 \wedge f_2) \to \bar{g} = ((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge \bar{\bar{p}} = ((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge p$$

заперечувана. Побудуємо таблицю істинності для цієї формули. Із табл. 1.12 видно, що формула $(p \to q) \wedge \bar{q} \wedge p$ хибна в будь-якій інтерпретації.

Таблиця 1.12

p	q	$p \to q$	$\bar{q}$	$(p \to q) \wedge \bar{q}$	$((p \to q) \wedge \bar{q}) \wedge p$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F

Тепер відповідно до теореми 1.3 можна дійти висновку, що формула $\bar{p}$ логічно випливає з формул $p \to q$ та $\bar{q}$.

1.8. Застосування правил виведення в логіці висловлювань

Розглянемо правила виведення та їх застосування в логіці висловлювань. Ці правила обґрунтовують кроки *доведення логічних теорем*, яке полягає в перевірці того, що висновок являє собою логічний наслідок множини гіпотез.

Деякі важливі правила виведення та відповідні їм тавтології наведено в табл. 1.13. Для прикладу, правило виведення modus ponens має вигляд $p, p \to q \vdash q$. Згідно з теоремою 1.2, воно ґрунтується на тавтології $(p \wedge (p \to q)) \to q$.

Таблиця 1.13

Правило виведення	Тавтологія	Назва правила виведення
$p \vdash p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	Уведення диз'юнкції
$p \wedge q \vdash p$	$(p \wedge q) \to p$	Виключення кон'юнкції
$p, q \vdash p \wedge q$	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	Уведення кон'юнкції
$p, p \to q \vdash q$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\bar{q}, p \to q \vdash \bar{p}$	$(\bar{q} \wedge (p \to q)) \to \bar{p}$	Modus tollens
$p \to q, q \to r \vdash p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Гіпотетичний силогізм

Правило виведення	Тавтологія	Назва правила виведення
$p \vee q, \bar{p} \vdash q$	$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \to q$	Диз'юнктивний силогізм
$p \vee q, \bar{p} \vee r \vdash q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\bar{p} \vee r)) \to (q \vee r)$	Резолюція

Приклад 1.48. Припустимо, що імплікація „Якщо падає сніг, то ми катаємося на лижах" і її гіпотеза „Падає сніг" істинні. Тоді за правилом modus ponens висновок імплікації „Ми катаємося на лижах" також істинний.

Приклад 1.49. Нехай істинна імплікація: „Якщо $n > 3$, то $n^2 > 9$". Отже, якщо $n > 3$, то за правилом modus ponens висновок $n^2 > 9$ правильний для цього n.

Далі наведено декілька прикладів міркувань із використанням правил виведення, наведених у табл. 1.13.

Приклад 1.50. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні: „Похолоднішало. Отже, похолоднішало чи почав падати дощ."

Нехай p — висловлювання „Похолоднішало", а q — висловлювання „Почав падати дощ". Тоді це твердження можна записати у вигляді правила *введення диз'юнкції* $p \vdash p \vee q$.

Приклад 1.51. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні: „Похолоднішало та почав падати дощ. Отже, похолоднішало."

Нехай p: „Похолоднішало", а q: „Почав падати дощ". Тоді це твердження можна записати у вигляді правила *виключення кон'юнкції* $p \wedge q \vdash p$.

Приклад 1.52. З'ясуємо, яке правило виведення використано в такому міркуванні. „Якщо сьогодні падатиме дощ, то сьогодні ми не поїдемо на пікнік. Якщо ми не поїдемо на пікнік сьогодні, то поїдемо на пікнік завтра. Отже, якщо сьогодні падатиме дощ, то ми поїдемо на пікнік завтра".

Нехай p: „Сьогодні падатиме дощ", q: „Сьогодні ми не поїдемо на пікнік", а r: „Ми поїдемо на пікнік завтра". Тоді це твердження можна записати у вигляді правила гіпотетичного силогізму $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

Якщо твердження містить багато гіпотез, то потрібно застосувати декілька правил виведення для того, щоб довести істинність висновку. Проілюструємо це такими прикладами.

Приклад 1.53. Доведемо, що з гіпотез „Сьогодні не сонячний день і холодніше, ніж учора", „Ми підемо купатися лише якщо сьогодні сонячний день", „Якщо ми не підемо купатись, то поїдемо плавати на човні" та „Якщо ми поїдемо плавати на човні, то повернемося пізно ввечері" випливає висновок „Ми повернемося пізно ввечері".

Нехай p: „Сьогодні сонячний день", q: „Сьогодні холодніше, ніж учора", r: „Ми підемо купатися", s: „Ми поїдемо плавати на човні", t: „Ми повернемося пізно ввечері". Тут гіпотези — $\bar{p} \wedge q$, $r \to p$, $\bar{r} \to s$ і $s \to t$, а висновок — t.
Нижче наведено послідовність кроків отримання висновку із заданої множини гіпотез і зазначено застосовані правила виведення.

1. $\bar{p} \wedge q$ — гіпотеза.
2. $\bar{p}$ — правило виключення кон'юнкції до 1.
3. $r \to p$ — гіпотеза.
4. $\bar{r}$ — modus tollens до 2 та 3.
5. $\bar{r} \to s$ — гіпотеза.

6. s — modus ponens до 4 та 5.
7. $s \to t$ — гіпотеза.
8. t — modus ponens до 6 та 7.

Висновок доведено.

Приклад 1.54. Доведемо, що з гіпотез „Якщо ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я закінчу писати програму”, „Якщо ти не надішлеш мені повідомлення електронною поштою, то я рано піду спати” та „Якщо я рано піду спати, то прокинуся бадьорим” випливає висновок „Якщо я не закінчу писати програму, то я прокинуся бадьорим”.

Уведемо такі позначення: p: „Ти надішлеш мені повідомлення електронною поштою”, q: „Я закінчу писати програму”, r: „Я рано піду спати”, s: „Я прокинуся бадьорим”. Гіпотези можна записати у вигляді $p \to q$, $\bar{p} \to r$, $r \to s$. Потрібно обґрунтувати висновок $\bar{q} \to s$.

Нижче наведено послідовність кроків для отримання висновку із заданої множини гіпотез. Застосовані правила виведення записано справа.

1. $p \to q$ — гіпотеза.
2. $\bar{q} \to \bar{p}$ — контрапозиція (див. приклад 1.17).
3. $\bar{p} \to r$ — гіпотеза.
4. $\bar{q} \to r$ — гіпотетичний силогізм до 2 та 3.
5. $r \to s$ — гіпотеза.
6. $\bar{q} \to s$ — гіпотетичний силогізм до 4 та 5.

Висновок доведено.

1.9. Метод резолюцій

Існують комп'ютерні програми, котрі розроблено для автоматизації міркувань, виконуваних за допомогою доведення логічних теорем. У багатьох із цих програм використано правило виведення, відоме як резолюція. *Правило резолюції* записують у вигляді $p \lor q,\ \bar{q} \lor r \vdash p \lor r$. На основі цього правила Дж. Робінсон (G. Robinson) 1965 р. запропонував *метод резолюцій* автоматичного доведення логічних теорем.

Нехай формулу f записано в КНФ (див. підрозділ 1.3)

$$f = d_1 \land d_2 \land \ldots \land d_m.$$

Тут кожна з формул d_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — літерал або диз'юнкція літералів. Формулу d_i називають *елементарною диз'юнкцією*, *диз'юнктом* або *клаузою*. Кількість літералів у формулі d_i називають *рангом* елементарної диз'юнкції. Розглядають також елементарну диз'юнкцію з рангом 0, яку позначають $\square$; така диз'юнкція не містить жодного літералу. За означенням елементарну диз'юнкцію з рангом 0 уважають такою, що дорівнює F.

За принципом прямої дедукції формулу g можна вивести з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тоді й лише тоді, коли $f_1 \land f_2 \land \ldots \land f_n \land \bar{g}$ — суперечність. Так буде, якщо одна з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ хибна чи формула g істинна. Нехай формулу $f = f_1 \land f_2 \land \ldots \land f_n \land \bar{g}$ записано в КНФ $f = d_1 \land d_2 \land \ldots \land d_m$, де $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — її елементарні диз'юнкції. Очевидно, що цю КНФ можна записати у вигляді множини її елементарних диз'юнкцій $S = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$. Множину S називають *невиконанною*, якщо формула f невиконанна.

Припустимо, що елементарні диз'юнкції d_1 і d_2 такі, що d_1 містить літерал l_1, контрарний до літералу l_2 з d_2. Викреслимо літерал l_1 із d_1 та l_2 з d_2; побудуємо диз'юнкцію решти літералів цих елементарних диз'юнкцій. Отриману елементарну диз'юнкцію називають *резольвентою.*

Приклад 1.55. Побудуємо резольвенту пари елементарних диз'юнкцій $d_1 = p \vee r$ і $d_2 = \bar{p} \vee q$. Ці елементарні диз'юнкції містять контрарну пару літералів p та $\bar{p}$, які можна викреслити з d_1 і d_2. Утворимо диз'юнкцію літералів, що залишилися. Одержимо резольвенту $r \vee q$.

ТЕОРЕМА 1.4. Резольвента d елементарних диз'юнкцій d_1 і d_2 — логічний наслідок диз'юнкцій d_1 і d_2.

Доведення. Нехай $d_1 = l \vee d_1'$, $d_2 = \overline{l} \vee d_2'$, $d = d_1' \vee d_2'$, де d_1' і d_2' — диз'юнкції літералів, відмінних від l і $\overline{l}$. Нехай диз'юнкції d_1 і d_2 істинні в інтерпретації I. Доведемо, що резольвента d елементарних диз'юнкцій d_1 і d_2 також істинна в цій інтерпретації. Зазначимо, що один із літералів l або $\overline{l}$ хибний в I. Нехай це літерал l. Тоді d_1 не може бути елементарною диз'юнкцією з рангом 1, бо тоді вона була б хибною в інтерпретації I. Це означає, що диз'юнкція d_1' істинна в інтерпретації I, а отже, і резольвента $d = d_1' \vee d_2'$ істинна в I. Аналогічно доведемо, що якщо літерал $\overline{l}$ хибний в інтерпретації I, то диз'юнкція d_2' істинна в I. Звідси одержимо, що диз'юнкція $d = d_1' \vee d_2'$ істинна в інтерпретації I.

Приклад 1.56. Нехай $f_1 = x \vee z$, $f_2 = y \vee \bar{z}$, $g = x \vee y$. Доведемо, що $f_1, f_2 \vdash g$. Формулу g отримано вилученням контрарної пари літералів $\{z, \bar{z}\}$ із диз'юнкції формул f_1 і f_2. Це резольвента формул f_1 і f_2, тому $f_1, f_2 \vdash g$.

Виведення формули d з елементарних диз'юнкцій множини S за методом резолюцій полягає в побудові такої скінченної послідовності елементарних диз'юнкцій $d_1', d_2', ..., d_k'$, що кожна d_i' (i = 1, 2, ..., k) являє собою або елемент множини S, або резольвенту елементарних диз'юнкцій, які передують d_i', причому $d = d_k'$.

Елементарну диз'юнкцію d можна *вивести* з множини S, якщо існує виведення d з S.

Головну ідею методу резолюцій формулюють так: перевірити, чи містить множина елементарних диз'юнкцій S диз'юнкцію $\square$. Якщо S містить $\square$, то множина S невиконанна. Якщо S не містить $\square$, то перевіряють, чи можна вивести $\square$ із множини S. Виведення $\square$ з S називають *доведенням невиконанності множини S* або *спростуванням S.*

Алгоритм методу резолюцій

Задано множину гіпотез $f_1, f_2, ..., f_n$ і висновок g. Алгоритм дає змогу визначити, чи являє собою формула g логічний наслідок множини гіпотез.

Крок 1. Побудувати кон'юнкцію множини гіпотез $f_1, f_2, ..., f_n$ і заперечення висновку $\bar{g}$ у вигляді $f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \wedge \bar{g}$. Звести отриману формулу до КНФ і записати множину її елементарних диз'юнкцій S.

Крок 2. Записати кожну елементарну диз'юнкцію множини S в окремому рядку.

Крок 3. Вибрати дві елементарні диз'юнкції, які містять контрарну пару літералів, і побудувати їх резольвенту. Записати одержану резольвенту в новому рядку, якщо в попередніх рядках іще немає такої елементарної диз'юнкції.

Крок 4. Крок 3 виконувати до отримання диз'юнкції з рангом 0. Одержання елементарної диз'юнкції з рангом 0 свідчить про те, що формулу g можна вивести з $f_1, f_2, ..., f_n$. Якщо неможливо отримати резольвенту, відмінну від елементів множини S і вже побудованих резольвент, то множина S неспростовна. Кінець.

Приклад 1.57. Покажемо невиконанність множини $S = \{\bar{p} \vee q, \bar{q}, p\}$ за допомогою методу резолюцій. Запишемо кожну елементарну диз'юнкцію в окремому рядку та перенумеруємо їх:

(1) $\bar{p} \vee q$;

(2) $\bar{q}$;

(3) p;

(4) $\bar{p}$.

Резольвенту (4) отримано з елементарних диз'юнкцій (1) і (2). Далі,

(5) $\square$.

Резольвента (5) — диз'юнкція з рангом 0; її одержано з елементарної диз'юнкції (3) та резольвенти (4). Виведення диз'юнкції з рангом 0 із множини S спростовує цю множину.

Приклад 1.58. Доведемо логічний наслідок формули $p \vee q, p \to r, q \to s \vdash r \vee s$ методом резолюцій. За принципом прямої дедукції побудуємо формулу, невиконанність якої потрібно довести. Вона має вигляд $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s) \wedge (\overline{r \vee s})$. Запишемо гіпотези у вигляді елементарних диз'юнкцій і випишемо кожну з них в окремому рядку:

(1) $p \vee q$;

(2) $\bar{p} \vee r$;

(3) $\bar{q} \vee s$.

Оскільки заперечення висновку $\overline{r \vee s} = \bar{r} \wedge \bar{s}$ являє собою дві елементарні диз'юнкції $\bar{r}$ і $\bar{s}$ із рангом 1, то їх теж випишемо в окремих рядках:

(4) $\bar{r}$;

(5) $\bar{s}$.

Послідовно побудувавши всі можливі резольвенти методом резолюцій, виведемо диз'юнкцію з рангом 0. Біля кожної резольвенти випишемо номери елементарних диз'юнкцій, з яких її отримано:

(6) $\bar{p}$ (2), (4);

(7) q (6), (1);

(8) $\bar{q}$ (3), (5);

(9) $\square$ (7), (8).

Одержання диз'юнкції з рангом 0 доводить теорему.

1.10. Правила виведення в численні предикатів

Розглянемо деякі важливі правила виведення для формул із кванторами.

Універсальна конкретизація — це правило виведення того, що $P(c)$ істинне для довільного елемента c з предметної області за умови, що формула $\forall x P(x)$ істинна. Наприклад, універсальну конкретизацію можна використати тоді, коли з твердження „Всі люди смертні” потрібно дійти висновку „Сократ — смертний”. Тут Сократ — елемент предметної області, яка складається з усіх людей.

Універсальне узагальнення — це правило виведення, згідно з яким $\forall x P(x)$ істинне, якщо істинне $P(c)$ для довільного c з предметної області. Це правило використовують тоді, коли на підставі істинності $P(c)$ для кожного елемента c з предметної області твердять, що $\forall x P(x)$ істинне. Вибраний елемент c має бути довільним і не конкретизованим. Універсальне узагальнення неявно застосовують у багатьох математичних доведеннях і рідко згадують явно.

Екзистенційна конкретизація — це правило, яке дає змогу дійти висновку про те, що на підставі істинності $\exists x P(x)$ можна твердити, що в предметній області є елемент c, для якого $P(c)$ істинне. Зазвичай про елемент c відомо тільки те, що він існує. Із цього випливає, що можна позначити його та продовжувати міркування.

Екзистенційне узагальнення — це правило виведення, використовуване для того, щоб на підставі істинності $P(c)$ на якомусь елементі c з предметної області дійти висновку, що $\exists x P(x)$ істинне.

Правила виведення в численні предикатів зазначено в табл. 1.14.

Таблиця 1.14

Правило виведення	**Назва**
1. $\forall x P(x) \vdash P(c)$	Універсальна конкретизація
2. $P(c) \vdash \forall x P(x)$	Універсальне узагальнення
3. $\exists x P(x) \vdash P(c)$	Екзистенційна конкретизація
4. $P(c) \vdash \exists x P(x)$	Екзистенційне узагальнення

У правилах 1 і 2 елемент c предметної області довільний, а в правилах 3 та 4 в предметній області має бути принаймні один такий елемент.

Приклад 1.59. Доведемо, що гіпотези „Кожний, хто вивчає комп’ютерні науки, слухає курс дискретної математики” та „Марія вивчає комп’ютерні науки” дають змогу сформулювати висновок „Марія слухає курс дискретної математики”.

Нехай $D(x)$: „x вивчає комп’ютерні науки”, $C(x)$: „x слухає курс дискретної математики”. Тоді гіпотези — це формули $\forall x(D(x) \to C(x))$ і D(Марія), а висновок — C(Марія). Доведення висновку для введеної множини гіпотез виконаємо в такій послідовності.

1. $\forall x(D(x) \to C(x))$ — гіпотеза.
2. D(Марія) $\to$ C(Марія) — універсальна конкретизація до 1.
3. D(Марія) — гіпотеза.
4. C(Марія) — modus ponens до 2 та 3.

Приклад 1.60. Доведемо, що з гіпотез „У групі є студент, який не читав підручника” та „Всі студенти групи склали іспит” можна сформулювати висновок „Дехто з тих, хто склав іспит, не читав підручника”.

Нехай $C(x)$: „x учиться в групі”, $B(x)$: „x читав підручник” і $P(x)$: „x склав іспит”. Гіпотези — це $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ і $\forall x(C(x) \to P(x))$, а висновок — $\exists x(P(x) \wedge \overline{B}(x))$. Доведення — це така послідовність кроків.

1. $\exists x(C(x) \wedge \overline{B}(x))$ — гіпотеза.
2. $C(a) \wedge \overline{B}(a)$ — екзистенційна конкретизація до 1.
3. $C(a)$ — виключення кон’юнкції до 2.

4. $\forall x(C(x) \to P(x))$ — гіпотеза.
5. $C(a) \to P(a)$ — універсальна конкретизація до 4.
6. $P(a)$ — modus ponens до 3 та 5.
7. $\overline{B}(a)$ — виключення кон'юнкції до 2.
8. $P(a) \wedge \overline{B}(a)$ — уведення кон'юнкції до 6 і 7.
9. $\exists x(P(x) \wedge \overline{B}(x))$ — екзистенційне узагальнення до 8.

1.11. Методи доведення теорем

Доведення теорем може бути доволі складним. Розглянемо різні методи доведення. Оскільки багато теорем мають вигляд імплікації, потрібно вміти доводити тавтологічність імплікації. Повторимо, що $p \to q$ істинне, окрім випадку, коли p істинне, а q — хибне. Розглянемо найзагальніші методи доведення.

Пряме доведення

Тавтологічність імплікації $p \to q$ можна довести, переконавшись, що коли припущення імплікації p істинне, то й висновок q також істинний.

Доведення від протилежного

Можна довести (див. задачу 5), що імплікація $p \to q$ еквівалентна кожній із формул $\bar{q} \to \bar{p}$, $(p \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$, $(p \wedge \bar{q}) \to q$, $(p \wedge \bar{q}) \to \mathrm{F}$, де F — значення „хибність". Тому замість доведення тавтологічності $p \to q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох наведених формул. Розглянемо, наприклад, імплікацію $\bar{q} \to \bar{p}$. За умови істинності $\bar{q}$ потрібно довести істинність $\bar{p}$. Це найпростіший спосіб доведення теореми $p \to q$ від протилежного: ми припускаємо протилежне до того, що потрібно довести, й одержуємо суперечність із тим, що дано.

У разі доведення на основі решти трьох формул ми беремо до уваги водночас і те, що дано (p), і протилежне до того, що потрібно довести ($\bar{q}$), тобто ($p \wedge \bar{q}$). Тоді для доведення теореми $p \to q$ достатньо отримати суперечність із тим, що дано ($\bar{p}$), або вивести те, що потрібно довести (q), або, нарешті, одержати суперечність $\mathrm{F} = r \wedge \bar{r}$. Отже, в останньому випадку з ($p \wedge \bar{q}$) достатньо вивести якесь висловлювання r і його заперечення $\bar{r}$ (бо тоді мало б бути істинним висловлювання $r \wedge \bar{r}$, що неможливо). Останній спосіб доведення від протилежного в певному розумінні найзагальніший.

Доведення аналізом випадків

Іноді для доведення тавтологічності імплікації $p \to q$ зручно використати замість p диз'юнкцію $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ як припущення імплікації, якщо p та $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ еквівалентні.

На основі логічної еквівалентності

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q = (p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)$$

доведення тавтологічності імплікації

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

можна замінити доведенням тавтологічності кожної з n імплікацій $p_i \to q$, $i = 1, 2, \ldots, n$ окремо.

1.12. Множина. Кортеж. Декартів добуток

Теорію множин, основи якої викладено в цьому розділі, у математиці називають наївною [17]. Є й інші варіанти побудови теорії множин, наприклад конструктивний і формалістський, у яких поняття множини вводять інакше (у конструктивній теорії множин — означають). У нас поняття множини первісне, тобто неозначуване. Опишемо це поняття так: *множиною* називають будь-який набір певних відмінних один від одного об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, розглядуваних як єдине ціле. Відповідно до цього опису вивчають не окремі об'єкти, а їх сукупності як певні утворення.

У математиці застосовують і такі синоніми терміна „множина": система, клас, область, сукупність. Використовують також поняття „сім'я", але ми вживатимемо його в іншому значенні (див. розділ 3).

Об'єкти, які утворюють множину, називають її *елементами*. Про множину говорять, що вона містить ці елементи. Якщо об'єкт a — елемент множини A, то пишемо $a \in A$, а ні, то $a \notin A$.

Множину можна задати, навівши її елементи у фігурних дужках. Наприклад, множина $A = \{a, e, i, o, u\}$ містить елементи a, e, i, o, u й лише ці елементи. Множина не може містити двох однакових елементів, а порядок її елементів не фіксують.

Для часто використовуваних множин є спеціальні позначення:

- $\varnothing$ — *порожня* множина, яка не містить жодного елемента;
- Z — множина *цілих чисел*, $Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$;
- R — множина *дійсних чисел*;
- N — множина *натуральних чисел*, $N = \{1, 2, ...\}$;
- N_0 — множина *натуральних чисел із числом* 0, $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$.

Можна задати множину, зазначивши спільну властивість всіх її елементів. Тоді множину A задають за допомогою позначення $A = \{x \mid P(x)\}$, яке читають так: „A — це множина об'єктів x, які мають властивість $P(x)$". Наприклад, $A = \{x \mid x \in N_0, x < 7\}$ — це множина $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Іноді замість вертикальної риски використовують дві крапки, тобто $A = \{x : x \in N_0, x < 7\}$.

Дві множини A та B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Рівність множин A та B записують як $A = B$.

Множину A називають *підмножиною* множини B, якщо кожний елемент множини A належить B. У такому разі пишуть $A \subset B$, причому може бути $A = B$. Якщо $A = B$ чи $A = \varnothing$, то A називають *невласною* підмножиною множини B, а ні, то *власною*. Для будь-якої множини A правдиве включення $\varnothing \subset A$.

Множини бувають скінченними й нескінченними. *Скінченною* називають множину, для якої існує натуральне число, що дорівнює кількості її елементів. Множину, яка не є скінченною, називають *нескінченною*. Кількість елементів скінченної множини A позначають як $|A|$ і називають *потужністю*. Поняття потужності вводять і для нескінченних множин, але ми не будемо розглядати його.

Часто всі досліджувані множини являють собою підмножини якоїсь множини, називаної *універсальною множиною*, чи *універсумом*. Універсальну множину позначають як U.

Множини можна зображати графічно за допомогою *діаграм Венна*, які запровадив 1881 р. англійський математик Дж. Венн (J. Venn). Універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини — кругами в ньому.

Для заданої множини A можна розглянути множину всіх її підмножин, зокрема порожню множину $\varnothing$ і саму множину A. Цю множину позначають 2^A чи $P(A)$ й називають *множиною-степенем*, чи *булеаном* множини A. Для скінченної множини A множина 2^A містить $2^{|A|}$ елементів.

Приклад 1.61. Нехай $A = \{0, 1, 2\}$. Тоді $2^A = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$. Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

Кортеж — це впорядкований набір елементів. Це не означення кортежу, бо не пояснено, що таке впорядкований набір. Уважатимемо поняття „кортеж” (*вектор*, *рядок*, *ланцюжок*), як і поняття множини, первісним, неозначуваним. Елементи, що утворюють кортеж, називають його *компонентами*. Компоненти нумерують, кількість компонент називають *довжиною* (*розмірністю*) кортежу. Нескінченні кортежі не розглядатимемо.

На відміну від елементів множини, компоненти кортежу можуть повторюватись. Кортеж записують у круглих дужках, наприклад (a, b, c, a, d) — кортеж довжиною 5. Іноді дужки й навіть коми не пишуть, наприклад 011001. Кортежі довжиною 2 часто називають *парами*, довжиною 3 — *трійками*, довжиною n — *n-ками* („*енками*”).

Два кортежі рівні, якщо вони мають однакову довжину та відповідні їх компоненти рівні. Інакше кажучи, кортежі $(a_1, ..., a_m)$ і $(b_1, ..., b_n)$ рівні, якщо $m = n$ та $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_m = b_n$.

Декартовим добутком множин A та B (позначають $A \times B$) називають множину всіх таких пар (a, b), що $a \in A$, $b \in B$. Зокрема, якщо $A = B$, то обидві компоненти належать A. Такий добуток позначають як A^2 та називають *декартовим квадратом* множини A. Аналогічно, декартовим добутком n множин $A_1, ..., A_n$ (позначають $A_1 \times ... \times A_n$) називають множину всіх таких кортежів $(a_1, ..., a_n)$ довжиною n, що $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$. Частковий випадок $A \times ... \times A$ позначають як A^n і називають *n-м степенем* множини A.

Приклад 1.62. Нехай $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Тоді

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\},$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Зрозуміло, що загалом $A \times B \neq B \times A$.

Для скінченних множин потужність (кількість елементів) декартового добутку дорівнює добутку потужностей цих множин: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

1.13. Операції над множинами. Доведення рівностей з множинами

Будемо вважати, що всі розглядувані множини — підмножини якось універсуму U. Для довільних множин A та B можна побудувати нові множини за допомогою *теоретико-множинних операцій*:

- об'єднанням множин A та B називають множину $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$;
- перетином множин A та B називають множину $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$;
- різницею множин A та B називають множину $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$;
- доповненням множини A називають множину $\overline{A} = U \setminus A$, де U — універсальна множина.

На рис. 1.1 подано діаграми Венна, які ілюструють операції над множинами.

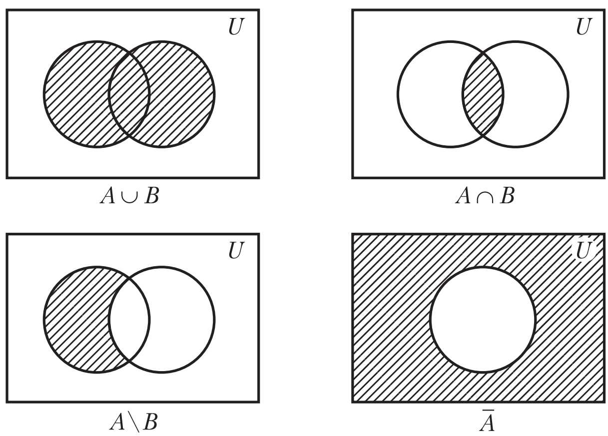

Рис. 1.1

Теоретико-множинні операції задовольняють законам, наведеним у табл. 1.15.

Таблиця 1.15

Назва закону	Формулювання закону
1. Закони комутативності	*а*) $A \cup B = B \cup A$ *б*) $A \cap B = B \cap A$
2. Закони асоціативності	*а*) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *б*) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Закони дистрибутивності	*а*) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *б*) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Закон подвійного доповнення	$\overline{(\overline{A})} = A$
5. Закони ідемпотентності	*а*) $A \cap A = A$ б) $A \cup A = A$
6. Закони де Моргана	*а*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *б*) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Таблиця 1.15 (*продовження*)

Назва закону	Формулювання закону
7. Закони поглинання	*а*) $A \cap (A \cup B) = A$
	б) $A \cup (A \cap B) = A$
8. Закони тотожності	*а*) $A \cup \varnothing = A$
	б) $A \cap U = A$
9. Закони домінування	*а*) $A \cup U = U$
	б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

Говорять, що дві множини A та B *не перетинаються*, якщо вони не мають спільних елементів, тобто якщо $A \cap B = \varnothing$.

Для будь-яких скінченних множин A та B правдива рівність $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ — частинний випадок принципу включення-виключення, докладно розгляненого в розділі 2.

Систему $S = \{A_i\}$ ($i \in I$, де I — множина індексів) підмножин множини A називають *розбиттям* множини A за таких умов.

1. $A_i \neq \varnothing$ для $i \in I$.
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$.
3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

Інакше кажучи, система S непорожніх підмножин множини A являє собою розбиття цієї множини, якщо будь-який елемент $a \in A$ належить точно одній множині A_i із системи S.

Доводити рівності з множинами можна різними способами. Нижче наведено приклади, що ілюструють способи доведення.

Спосіб 1. Цей спосіб ґрунтується на такій теоремі.

ТЕОРЕМА 1.5. Множини A та B рівні тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$.

Приклад 1.63. Доведемо рівність множин, яка являє собою формулювання закону де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Припустимо, що $x \in \overline{A \cap B}$. Тоді $x \notin A \cap B$, звідки випливає, що $x \notin A$ чи $x \notin B$. Отже, $x \in \overline{A}$ чи $x \in \overline{B}$, а це означає, що $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Ми довели, що $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Навпаки, нехай $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тоді $x \in \overline{A}$ чи $x \in \overline{B}$, звідки випливає, що $x \notin A$ чи $x \notin B$. Це означає, що $x \notin A \cap B$, тобто $x \in \overline{A \cap B}$. Отже, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Спосіб 2. Доведення рівності множин за допомогою законів логіки.

Приклад 1.64. Доведемо рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Послідовно перевіримо рівності

$$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\} = \{x \mid \neg\, (x \in A \cap B)\} =$$

$$= \{x \mid \neg\, ((x \in A) \wedge (x \in B))\} = \{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\} =$$

$$= \{x \mid (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\} = \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Спосіб 3. Доведення рівності множин за допомогою *таблиць належності*, які містять усі можливі комбінації належності елементів множинам (1 — елемент належить множині, 0 — не належить).

Приклад 1.65. Доведемо цим способом рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Доведення подано в табл. 1.16.

Таблиця 1.16

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Стовпчики, які в табл. 1.16 відповідають значенням $\overline{A \cap B}$ та $\overline{A} \cup \overline{B}$, одинакові, отже $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Спосіб 4. Доведення рівності множин за допомогою основних законів теорії множин (див. табл. 1.15).

Приклад 1.66. Довести тотожність $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$. Використовуючи закони де Моргана та комутативні (див. табл. 1.15), можна записати таку послідовність рівних множин:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$$

за законом де Моргана 6*а*

$$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$$

за законом де Моргана 6*б*

$$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$$

за законом комутативності 1*б*.

$$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

за законом комутативності 1*а*.

1.14. Комп'ютерне подання множин

У комп'ютері можна подавати множини різними способами. Один зі способів — зберігати невпорядковані елементи множини. Проте в такому разі операції з множинами займатимуть багато часу через те, що потрібно щоразу переглядати елементи. Тому розглянемо інші способи.

Одним із найпоширеніших і найпростіших способів — подання множин за допомогою бітових рядків. Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Нехай універсальна множина U містить n елементів, тоді $U = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n\}$.

Множину $A \subset U$ подають у комп'ютері рядком із 0 і 1 довжиною n так: якщо $a_i \in A$, то i-й біт дорівнює 1, а ні, то 0.

Приклад 1.67. Нехай $U = \{a, b, c, d, e, f, m, n, p, q\}$, $A = \{b, m, n, q\}$, $B = \{a, b, f, m, q\}$. Тоді множину A подають рядком 0100001101, а множину B — рядком 1100011001.

Тепер на комп'ютері легко виконати операції над множинами A та B. Неважко переконатись, що об'єднанню множин відповідає порозрядне OR над бітовими рядками, які подають множини A та B, а перетину множин — порозрядне AND над відповідними бітовими рядками.

Приклад 1.68. Використаємо бітові рядки, які подають множини A та B з прикладу 1.67. Бітовий рядок, який відповідає об'єднанню цих множин $A \cup B = \{a, b, f, m, n, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного OR:

$$\begin{array}{l} 0100001101 \\ \underline{1100011001} \\ 1100011101. \end{array}$$

Бітовий рядок, який відповідає перетину множин $A \cap B = \{b, m, q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного AND:

$$\begin{array}{l} 0100001101 \\ \underline{1100011001} \\ 0100001001. \end{array}$$

Якщо універсальна множина U має велику потужність, а її підмножини не дуже потужні, то подання за допомогою бітових рядків неефективне щодо витрат пам'яті. У такому разі доцільно використовувати інші структури даних — зазвичай зв'язані списки та хеш-таблиці [2]. У певних задачах потрібні спеціальні методи подання множин, які ґрунтуються на використанні дерев [2, 23].

Контрольні запитання та завдання

1. Задано висловлювання p: „Завтра буде холодно" та q: „Падатиме сніг". Записати наведені нижче висловлювання за допомогою p, q та логічних операцій:
   а) завтра буде холодно й падатиме сніг;
   б) завтра буде холодно, але сніг не падатиме;
   в) завтра не буде холодно й не падатиме сніг;
   г) завтра падатиме сніг або буде холодно (або одне й друге);
   д) якщо завтра буде холодно, то падатиме сніг;
   е) завтра буде холодно чи падатиме сніг, але не падатиме сніг, якщо буде холодно;
   ж) для того, щоб завтра було холодно, необхідно й достатньо, щоб падав сніг.
2. Визначити кількість різних двомісних логічних операцій.
3. Визначити кількість різних двомісних логічних операцій, які набувають значення T щонайбільше в трьох інтерпретаціях.
4. Побудувати таблиці істинності для кожного з висловлювань:
   а) $p \to q$;
   б) $\bar{p} \sim q$;

в) $(p \to q) \vee (\bar{p} \to q)$;

г) $(p \to q) \wedge (\bar{p} \to q)$;

д) $(p \sim q) \vee (\bar{p} \sim q)$;

е) $(\bar{p} \sim \bar{q}) \sim (p \sim q)$.

5. Довести, що формули $\bar{q} \to \bar{p}$, $(p \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$, $(p \wedge \bar{q}) \to q$, $(p \wedge \bar{q}) \to \mathrm{F}$, де F — значення „хибність", мають ту саму таблицю істинності, що й формула $p \to q$.

6. Довести, що формули $p \sim q$ та $(p \to q) \wedge (q \to p)$ мають однакові таблиці істинності.

7. Знайти значення змінної x після обчислення кожного з операторів, наведених нижче, якщо перед їх виконанням $x = 1$:

а) `if (1 + 2 = 3) then x:= x + 1;`

б) `if (1 + 1 = 3) OR (2 + 2 = 3) then x := x + 1;`

в) `if (2 + 3 = 5) AND (3 + 4 = 7) then x := x + 1;`

г) `if (1 + 1 = 2) XOR (1 + 2 = 3) then x := x + 1;`

д) `if x < 2 then x := x + 1.`

8. Застосувавши таблиці істинності, довести закони дистрибутивності.

9. Застосувавши таблиці істинності, довести закони де Моргана.

10. Застосувавши таблиці істинності, довести правило контрапозиції $p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$.

11. Довести закони поглинання $p \vee (p \wedge q) = p$ та $p \wedge (p \vee q) = p$.

12. Довести закони виключеного третього $p \vee \bar{p} = \mathrm{T}$ та суперечності $p \wedge \bar{p} = \mathrm{F}$.

13. На основі властивості імплікації (без використання таблиць істинності та еквівалентних перетворень) довести, що формули наведені нижче тавтології:

а) $(p \wedge q) \to p$; б) $p \to (p \vee q)$; в) $\bar{p} \to (p \to q)$;

г) $(p \wedge q) \to (p \to q)$; д) $(\neg(p \to q)) \to p$; е) $(\neg(p \to q)) \to \bar{q}$.

14. Який із законів дистрибутивності $p * (q \blacklozenge r) = (p * q) \blacklozenge (p * r)$ та $(p \blacklozenge q) * r = (p * r) \blacklozenge (q * r)$ виконується, якщо логічні операції, позначені символами „♦" та „*", задано в наступній таблиці.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
*	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$	$\vee$	$\vee$	$\vee$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
♦	$\oplus$	$\to$	$\sim$	$\oplus$	$\to$	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\to$
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
*	$\oplus$	$\to$	$\to$	$\to$	$\to$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$
♦	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\sim$	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\to$

15. *Двоїстим* до складного висловлювання, яке містить лише логічні операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$, називають висловлювання, одержане заміною $\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$, T на F та F на T. Знайти висловлювання, двоїсті до висловлювань:

а) $p \wedge q \wedge r$; б) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$; в) $(p \vee \mathrm{F}) \wedge (q \vee \mathrm{T})$.

16. Нехай складне висловлювання задано такою таблицею істинності.

p	q	r	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
F	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	F	F	F	F
T	T	T	F	T	F	T	F

Виберемо інтерпретації, у яких значення істинності висловлювання дорівнює T. Для кожної такої інтерпретації побудуємо кон'юнкцію атомів або їх заперечень: якщо значення атома хибне, то воно входить до кон'юнкції із запереченням, а ні, то без заперечення. Запишемо диз'юнкцію отриманих кон'юнкцій. Побудовану формулу називають *досконалою диз'юнктивною нормальною формою* (ДДНФ). Наприклад, формула $(\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r)$ – ДДНФ висловлювання f_5. Побудувати ДДНФ висловлювань $f_1 - f_4$. Довести, що ДДНФ задає складне висловлювання.

17. Нехай складне висловлювання задано таблицею істинності. Виберемо інтерпретації, у яких висловлювання хибне. Для кожної такої інтерпретації побудуємо диз'юнкцію атомів або їх заперечень: якщо значення атома хибне, то він уходить до диз'юнкції без заперечення, а ні, то із запереченням. Запишемо кон'юнкцію отриманих диз'юнкцій. Побудовану формулу називають *досконалою кон'юнктивною нормальною формою* (ДКНФ). Наприклад, формула $(p \vee \overline{q} \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)$ – ДКНФ висловлювання f_4. Побудувати ДКНФ висловлювань f_1, f_2, f_3, f_5 із задачі 16. Довести, що ДКНФ задає складне висловлювання.

18. Побудувати складне висловлювання, яке складається з простих висловлювань p, q, r та набуває значення T тоді й лише тоді, коли:

а) p та q істинні, r хибне;

б) точно два з трьох висловлювань p, q, r істинні.

19. Побудувавши таблиці істинності, виявити, чи є висловлювання, наведені нижче, тавтологіями:

а) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \sim (p \to r)$; б) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \sim (\overline{p} \to \overline{q})$;

в) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to \overline{q})) \sim \overline{p}$; г) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \sim q$;

д) $(((\overline{p} \to \overline{q}) \to r) \wedge ((\neg(p \to q)) \to r)) \sim (p \to q)$.

20. За допомогою еквівалентних перетворень перевірити, чи є наведені нижче висловлювання тавтологіями:

а) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \sim q$; б) $((p \to q) \wedge (p \to \overline{q})) \sim \overline{p}$;

в) $(p \to q) \vee (\overline{p} \to q)$; г) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \vee \overline{q}$;

д) $(p \wedge q \wedge (p \sim q)) \sim (p \wedge q)$.

21. За означенням імплікації (без побудови таблиць істинності та виконання еквівалентних перетворень), перевірити, чи є наведені нижче висловлювання тавтологіями:

    а) $((p \vee q) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)) \to r$;

    б) $((p \vee q \vee s) \vee (p \to r) \wedge (q \to r) \wedge (s \to r)) \to r$;

    в) $(((p \wedge \overline{q}\,) \to \overline{p}\,) \wedge ((q \wedge \overline{r}\,) \to r)) \to (p \to r)$;

    г) $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)) \to (r \vee s)$.

22. Довести, що наведені нижче формули еквівалентні:

    а) $p \wedge (q \oplus r)$ і $(p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$;

    б) $p \to (q \sim r)$ і $(p \wedge q) \sim (p \wedge r)$;

    в) $p \to (q \vee r)$ і $(p \to q) \vee (p \to r)$.

23. Перевірити, чи еквівалентні наведені нижче формули:

    а) $p \oplus (q \wedge r)$ і $(p \oplus q) \wedge (p \oplus r)$;

    б) $(p \to q) \to r$ і $p \to (q \to r)$;

    в) $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

24. Подати висловлювання $p \sim q$ формулою, яка містить лише логічні операції $\neg$ та $\vee$.

25. Подати висловлювання $p \vee q$ формулою, яка містить лише логічну операцію $\to$.

26. Нехай $P(x)$: „$x = x^2$”, а предметна область змінної x — множина цілих чисел. Знайти значення істинності висловлювань:

    а) $P(0)$; б) $P(1)$; в) $P(-1)$;

    г) $\exists x P(x)$; д) $\forall x P(x)$.

27. Нехай $Q(x, y)$: „$x + y = x - y$”, а предметна область кожної змінної — множина цілих чисел. Визначити значення істинності висловлювань:

    а) $Q(1, 1)$; б) $Q(2, 0)$; в) $\forall y Q(1, y)$;

    г) $\exists x Q(x, 2)$; д) $\exists x \exists y Q(x, y)$; е) $\forall x \exists y Q(x, y)$;

    ж) $\forall x \forall y Q(x, y)$; и) $\exists x \forall y Q(x, y)$; к) $\forall y \exists x Q(x, y)$; л) $\exists y \forall x Q(x, y)$.

28. Предметна область кожної змінної предиката $P(x, y)$ — множина $\{1, 2, 3\}$. Записати наведені нижче висловлювання за допомогою логічних операцій кон’юнкції та диз’юнкції:

    а) $\exists x P(x, 3)$; б) $\forall y P(1, y)$;

    в) $\forall x \forall y P(x, y)$; г) $\exists x \exists y P(x, y)$;

    д) $\exists x \forall y P(x, y)$; е) $\forall y \exists x P(x, y)$.

29. Побудувати випереджену нормальну форму формул:

    а) $\forall x(\neg(\exists y(P(x) \to Q(y))))$;

    б) $\exists x(\neg(\forall y P(x, y, z) \to \exists u Q(x, u))) \wedge \forall t(\neg(\forall v(A(t) \vee B(v))))$.

    в) $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x, y))$;

    г) $\exists x(\neg((\exists y P(x, y)) \to (\exists z Q(z) \to R(x))))$;

д) $\exists x\left(\neg\left(\left(\exists y P(x,y)\right)\to\left(\exists z Q(z)\to R(x)\right)\right)\right)$;

е) $\forall x\forall y\left(\exists z P(x,y,z)\wedge\left(\exists u Q(x,u)\to\exists v Q(y,v)\right)\right)$.

30. Записати заперечення наведених нижче висловлювань формулами логіки першого ступеня та реченнями української мови:

а) кожний студент групи любить математику;

б) у групі є студент, який ніколи не бачив комп'ютера;

в) у групі є студент, який прослухав усі запропоновані математичні курси;

г) у групі є студент, який відвідав принаймні одну аудиторію кожного з навчальних корпусів університету.

31. Довести, що формули, наведені нижче, мають однакові значення істинності.

а) $\overline{\exists x\forall y P(x,y)}$ і $\forall x\exists y\,\overline{P}\,(x,y)$;

б) $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ і $\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$;

в) $\exists x(P(x)\vee Q(x))$ і $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.

32. Позначення $\exists!xP(x)$ відповідає реченню „У предметній області існує таке єдине x, що $P(x)$ істинне". Нехай множина цілих чисел — предметна область змінної x. Знайти значення істинності формул:

а) $\exists!x(x>1)$; б) $\exists!x(x^2=1)$; в) $\exists!x(x+3=2x)$; г) $\exists!x(x=x+1)$;

д) $\exists!xP(x)\to\exists xP(x)$; е) $\forall x\mathrm{P}(x)\to\exists!xP(x)$; ж) $\exists!x\,\overline{P}\,(x)\to\forall x\,\overline{P}\,(x)$.

33. Задано предметну область $M=\{1,\ 2,\ 3\}$ змінної x. Записати висловлювання $\exists!xP(x)$ за допомогою заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції.

34. Які правила виведення використано у наступних твердженнях?

а) Якщо падатиме дощ, то басейн буде зачинено. Падає дощ. Отже, басейн зачинено.

б) Якщо падатиме сніг, то університет буде зачинено. Університет не зачинено. Отже, сніг не падає.

в) Якщо я піду плавати, то довго буду на сонці. Якщо я довго буду на сонці, то засмагну. Отже, якщо я піду плавати, то засмагну.

г) Кенгуру живуть в Австралії, мають сильні нижні кінцівки, роблять довгі стрибки, і вони сумчасті. Отже, кенгуру — сумчасті.

д) На вулиці спека більше 40 градусів або небезпечне забруднення повітря. Сьогодні менше 40 градусів; отже, забруднення повітря небезпечне.

35. Дано гіпотези: „Іван тяжко працює", „Якщо Іван тяжко працює, то він пасивний хлопець" і „Якщо Іван — пасивний хлопець, то він не знайде кращої роботи". Використати правила виведення для обґрунтування такого висновку з цих гіпотез: „Іван не знайде кращої роботи".

36. Дано такі гіпотези: „Логіка складна чи небагато студентів люблять логіку" та „Якщо математика складна, то логіка не складна". Визначити, чи можна з цих гіпотез отримати висновок.

а) Математика не легка, якщо багато студентів люблять логіку.

б) Небагато студентів люблять логіку, якщо математика не складна.

в) Математика не легка чи логіка складна.

г) Логіка не складна чи математика не легка.

д) Якщо небагато студентів люблять логіку, то чи математика не легка, чи логіка не складна.

37. Довести, що в наведених нижче прикладах висновки можна вивести з наведених гіпотез.

а) Гіпотези: „Усі леви — жорстокі істоти”, „Деякі леви не п’ють кави”.
Висновок: „Деякі жорстокі істоти не п’ють кави”.

б) Гіпотези: „Усі колібрі мають яскраве пір’я”, „Жодний великий птах не їсть меду та не має яскравого пір’я”.
Висновок: „Колібрі — маленькі птахи”.

в) Гіпотези: „Кожний атлет сильний”, „Кожний, хто сильний і розумний, досягне успіху”, „Петро — атлет”, „Петро — розумний”.
Висновок: „Петро досягне успіху”.

38. Для кожного з логічних виведень, наведених нижче, визначити коректність висновку та зробити потрібні пояснення.

а) Усі студенти цієї групи розуміють логіку. Дмитро — студент цієї групи. Отже, Дмитро розуміє логіку.

б) Кожний студент, який вивчає комп’ютерні науки та є студентом старшого курсу, прослухав курс дискретної математики. Наталка прослухала курс дискретної математики. Отже, Наталка — студентка старшого курсу та вивчає комп’ютерні науки.

в) Кожний папуга схожий на фрукт. Моя пташка не папуга. Отже, моя пташка не схожа на фрукт.

г) Роман любить дивитися бойовики. Роман любить фільм „Третій зайвий”. Отже, фільм „Третій зайвий” — бойовик.

д) Кожний студент університету має жити в гуртожитку. Михайло не живе в гуртожитку. Отже, Михайло не студент університету.

е) Якщо геометрична фігура — квадрат, то її діагоналі взаємно перпендикулярні та в точці перетину діляться навпіл. Ця фігура не квадрат. Отже, її діагоналі не перпендикулярні та не діляться навпіл.

ж) Якщо число має дільник 6, то воно має дільниками числа 2 та 3. Якщо число має дільниками числа 2 та 3, то воно має дільник 6. Отже, число має дільник 6 тоді й лише тоді, коли воно має дільниками числа 2 та 3.

и) Якщо Петро поїде до Харкова, то Іван поїде до Києва. Петро поїде чи до Харкова, чи до Львова. Якщо Петро поїде до Львова, то Ольга залишиться у Полтаві. Ольга не залишилась у Полтаві. Отже, Іван поїхав до Києва.

39. Довести логічні теореми:

а) $\overline{p} \vee q,\ \overline{p} \vee r,\ \overline{q} \vee \overline{r} \vdash \overline{p}$;

б) $\overline{h},\ \overline{h} \to (p \vee q),\ p \to c,\ q \to c \vdash c$.

40. Побудувати резольвенту елементарних диз'юнкцій d_1 та d_2:

а) $d_1 = p \vee r$, $d_2 = \overline{p} \vee q$; б) $d_1 = \overline{p} \vee q \vee r$, $d_2 = \overline{q} \vee s$.

41. Перевірити наведені нижче виведення, використовуючи метод резолюцій:

а) $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r$; б) $p \vee q \vee s, p \to r, q \to r, s \to r \vdash r$;

в) $(p \wedge \overline{q}\,) \to \overline{p}, (q \wedge \overline{r}\,) \to r \vdash p \to r$; г) $p \vee q, p \to r, q \to s \vdash r \vee s$;

д) $p \to r, \; \overline{p} \to s, r \to q, s \to \overline{t}\,, t \vdash q$; е) $p \to q, \; \overline{p} \to r, q \to s \vdash r \vee s$.

42. Зобразити на координатній площині декартовий добуток множин $A \times B$ та $B \times A$. У задачі *б* записати також усі елементи декартових добутків:

а) $A = \{x \mid x \in R, 3 \leqslant x \leqslant 5\}$; $B = \{x \mid x \in R, 3 \leqslant x \leqslant 6\}$;

б) $A = \{x \mid x \in R, 3 \leqslant x \leqslant 5\}$; $B = \{x \mid x \in R, 3 \leqslant x \leqslant 6\}$.

43. Задано множини $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{0, 1\}$. Побудувати декартові добутки *а–г*:

а) $A \times B \times C$; б) $C \times B \times A$;

в) $C \times A \times B$; г) $B \times B \times B$.

44. Задано множини $A = \{a, b, c, d, e\}$ та $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Побудувати множини:

а) $A \cap B$; б) $A \cup B$;

в) $A \backslash B$; г) $B \backslash A$.

45. Знайти множини A та B, якщо $A \backslash B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \backslash A = \{2, 10\}$, і $A \cap B =$ $= \{3, 6, 9\}$.

46. Довести рівність множин $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

47. Довести рівності множин:

а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

48. Задано множини A, B та C. Довести рівність $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$.

49. Задано множини $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ та $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Побудувати множини:

а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$;

в) $(A \cup B) \cap C$; г) $(A \cap B) \cup C$.

50. Симетричною різницею множин A та B називається множина, задана рівністю $A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$:

а) зобразити діаграму Венна множини $A \oplus B$;

б) задано множини $A = \{1, 3, 5\}$ та $B = \{1, 2, 3\}$, побудувати множину $A \oplus B$;

в) нехай A та B — довільні множини. Довести рівність $A \oplus B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

51. Чи можна твердити, що $A = B$, якщо для множин A, B та C виконуються рівності:

а) $A \cup C = B \cup C$; б) $A \cap C = B \cap C$; в) $A \oplus C = B \oplus C$.

52. Нехай A, B та C — довільні множини. Довести, що
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

53. Задано універсальну множину $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

а) подати бітовими рядками множини $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 3, 6, 10\}$, $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$;

б) відновити множини за бітовими рядками 0101111100, 1000000001, 1111111111.

54. Показати, як можна використати операції над бітовими рядками для знаходження значень виразів:

а) $(A \cup B) \cap C$; б) $(A \cap B) \cup C$;

в) $(A \cap D) \cup (B \cap C)$; г) $A \cup B \cup C \cup D$.

Тут універсальна множина U — латинський алфавіт, який складається з 26 букв, а множини A, B, C та D такі: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$, $C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}$, $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$.

Комп'ютерні проекти

Скласти програми із зазначеними вхідними даними та результатами

1. Задано значення істинності висловлювань p та q. Знайти значення істинності кон'юнкції, диз'юнкції, альтернативного „або", імплікації й еквівалентності цих висловлювань.
2. Складне висловлювання задано таблицею істинності. Побудувати ДКНФ (див. задачу 17).
3. Задано два бітові рядки довжиною n. Знайти результати виконання порозрядних операцій OR, AND і XOR цих рядків.
4. Задано множину елементарних диз'юнкцій логіки висловлювань. Методом резолюцій визначити, чи невиконанна ця множина.
5. Дано множини A та B, які являють собою підмножини n-елементного універсуму. За допомогою бітових рядків визначити $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \oplus B$.
6. Дано скінченні множини A, B, C, D. Визначити всі пари цих множин, у яких перша множина — підмножина другої.
7. Дано множини E й F, кожна з яких — результат теоретико-множинних операцій над множинами A, B, C, D. За допомогою таблиці належності довести чи спростувати рівність $E = F$.
8. Дано скінченні множини A, B, C. Побудувати множини $A \times B \times C$, $C \times B \times A$, $C \times A \times B$, $C \times C \times B$, $A \times B \times A$, $C \times B \times C$.