Частина 1

Основи нарисної геометрії

Розділ 1

Предмет і метод нарисної геометрії. Геометричне моделювання у прямокутних проекціях

- Предмет і метод нарисної геометрії
- Геометричні моделі у прямокутних проекціях основних геометричних образів

1.1. Предмет і метод нарисної геометрії

Нарисна геометрія — розділ геометрії, в якому просторові об'єкти та методи розв'язання і дослідження просторових задач вивчають за допомогою їх геометричного моделювання (зображення) на площині.

Предметом нарисної геометрії є розроблення алгоритмів графічних операцій побудови геометричних моделей (зображень) об'єктів та процесів для розв'язання *позиційних* і *метричних задач*.

Метою розв'язання *позиційних задач* є вивчення взаємного розміщення геометричних об'єктів у просторі або на площині, *метричних* — метричні характеристики як самих об'єктів, так і їх взаємного положення.

Основним елементом тривимірного простору вважають точку. Довільну сукупність (множину) точок називають геометричною фігурою. Будь-який геометричний об'єкт (пряму чи криву лінію, площину, поверхню) можна задати сукупністю (множиною) точок.

Зображення об'єкта на площині вважають *повним*, якщо воно дає змогу визначити позиційний взаємозв'язок його елементів. Зображення, за якими можна визначити розміри об'єкта, називають *метрично визначеними*. Такі зображення можна побудувати лише за певними геометричними правилами, що вможливлюють зворотний перехід — від плоского зображення до натуральних форм об'єкта.

Основним методом побудови плоских зображень просторових об'єктів у нарисній геометрії є *метод проекціювання*. Зображення, побудовані за його допомогою, називають *проекціями*. Для отримання проекцій точки — основного елемента тривимірного простору — слід задати *площину проекцій* та *проекціювальний промінь*.

Через кожну точку простору А можна провести єдиний проекціювальний промінь. Його перетин із площиною проекцій Π_1 являє собою проекцію цієї точки. Такий промінь може бути заданий:

- центром S (центральне проекціювання);
- напрямом s (паралельне проекціювання).

На рис. 1.1, *а* показано центральне проекціювання, а на рис. 1.1, *б* — паралельне.

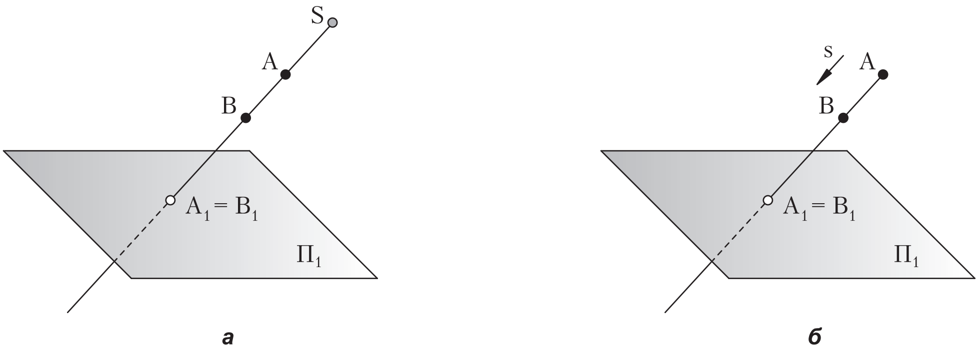


Рис. 1.1

Отримана проекція точки визначається однозначно, а от обернена задача визначення точки у просторі за її проекцією не однозначна. В одну й ту саму точку на площині проекцій проекціюються всі точки, що належать проекціювальному променю (наприклад, точка В). Одержане зображення не є оборотним. Для того, щоб зображення було *оборотним*, потрібно мати два зображення точки на одну або дві площини проекцій (рис. 1.2, *а*, *б*).

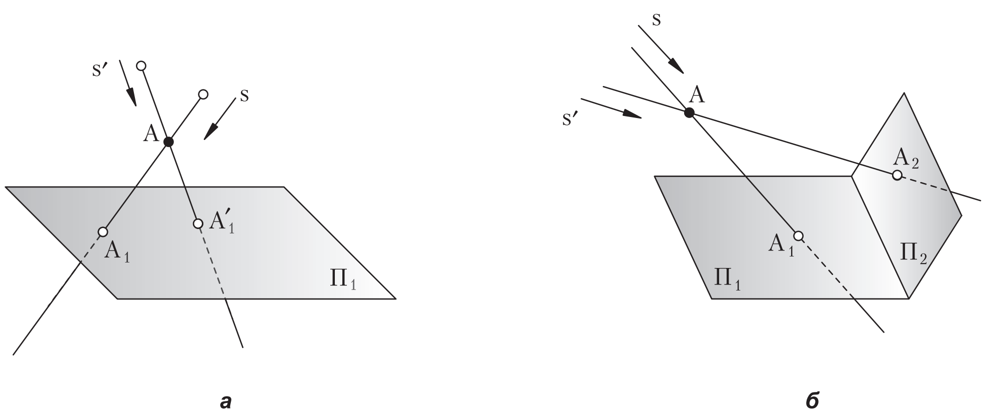


Рис. 1.2

Наведені схеми отримання зображень об'єктів досить складні для розв'язування позиційних та метричних задач. В інженерній практиці, як правило, використовують прямокутне проекціювання, коли проекціювальний промінь перпендикулярний до площини проекцій (рис. 1.3).

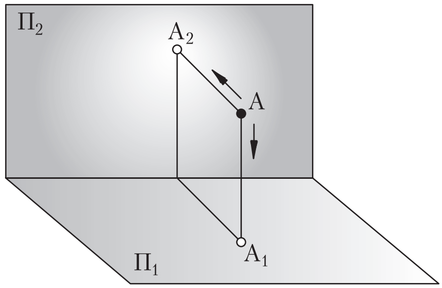


Рис. 1.3

1.2. Геометричні моделі у прямокутних проекціях основних геометричних образів

1.2.1. Моделювання точки. Комплексний рисунок точки

Моделями геометричних образів називають їх відображення на якусь упорядковану систему. Будь-яку точку простору в прямокутній системі координат можна задати трьома координатами (на рис. 1.4 точка А має координати x_A, y_A, z_A). Пари координатних осей формують три площини xOy, xOz, zOy, кожну з яких можна взяти як площину проекцій. Координатну площину xOy, розташовану горизонтально, називають *горизонтальною площиною проекцій* Π_1, перпендикулярну до неї площину xOz — *фронтальною площиною проекцій* Π_2.

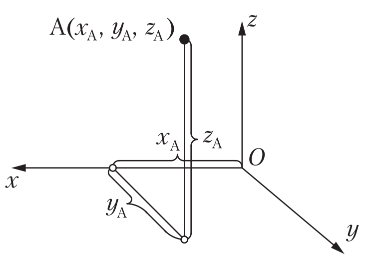


Рис. 1.4

Як правило, вважають, що фронтальна площина Π_2 розташована перед спостерігачем. Праворуч від спостерігача розташована профільна площина проекцій Π_3 (zOy) (рис. 1.5). Таку систему площин називають *прямокутною системою площин проекцій*.

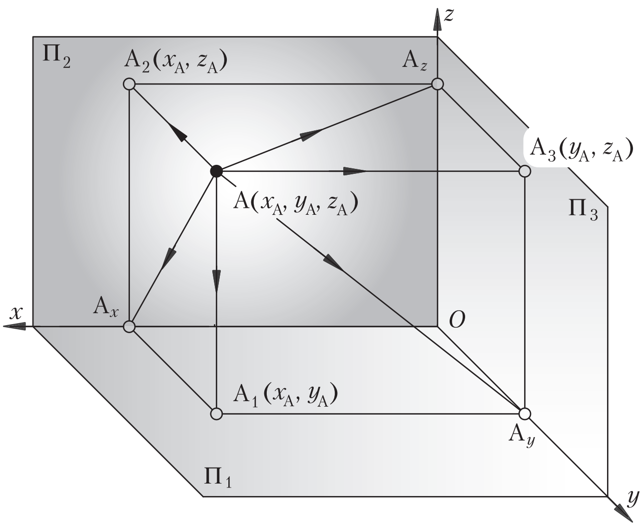


Рис. 1.5

Осі координат, які є лініями перетину площин проекцій, називають *осями проекцій Ox*, *Oy*, *Oz*, а початок координат *O — початком проекцій*.

Проекціювальні промені AA_1, AA_2, AA_3, проведені з точки A перпендикулярно до площин $П_1$, $П_2$, $П_3$, задають на перетині з ними відповідно A_1 — горизонтальну проекцію точки A, A_2 — фронтальну проекцію точки A, A_3 — профільну проекцію точки A.

Будь-які дві проекції точки A на площини проекцій задають три її координати та, відповідно, повністю визначають її положення у просторі. Наприклад, $A(A_1, A_2)$, $A(A_2, A_3)$, $A(A_1, A_3)$. Такий запис називають *визначником точки*. Точку A можна спроекціювати на осі проекцій. Отримані точки A_x, A_y, A_z називають проекціями точки A на відповідні осі проекцій.

Як було показано, дві проекції точки повністю визначають її положення у просторі. Проте для розв'язання деяких задач потрібна додаткова площина проекцій. Наприклад, відстань *d* від точки A до осі *Ox* можна визначити лише на профільній площині проекцій $П_3$.

Для спрощення наведеної системи площин проекцій перетворимо її на плоский рисунок. Із цією метою сумістимо горизонтальну та профільну площини проекцій з фронтальною площиною проекцій обертанням навколо осей *Ox* та *Oz* відповідно (рис. 1.6). Отриманий рисунок (рис. 1.7) називають *комплексним рисунком точки*, або *епюром Монжа точки*. Познака осі *Oy*, яка належить водночас площинам $П_1$ та $П_3$, на комплексному рисунку на площинах проекцій $П_1$ та $П_3$ відрізняється позначкою відповідної площини. Лінії, що з'єднують проекції, називають *лініями зв'язку*; A_2A_1 — *вертикальна лінія зв'язку*, A_2A_3 — *горизонтальна лінія зв'язку*.

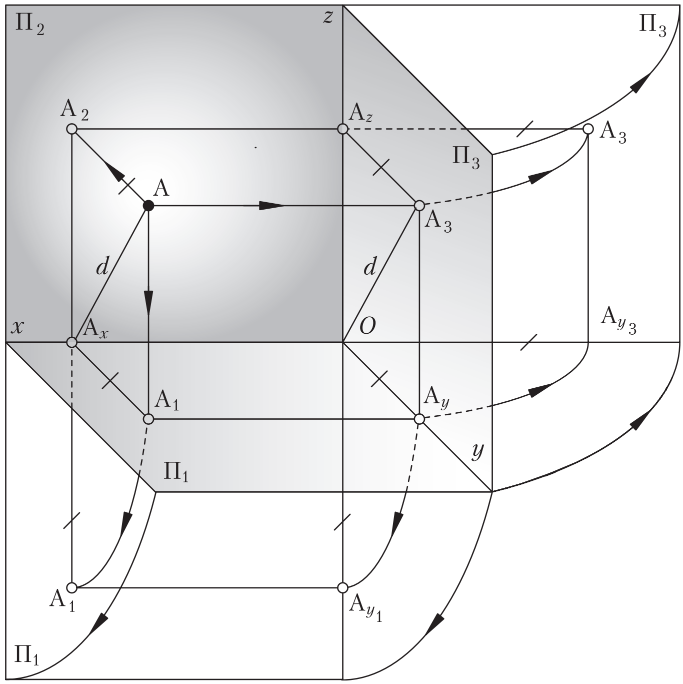

Π_2
z
Π_3
A_2
A_z
A_3
Π_3
A
A_3
d
d
x
A_x
O
A_{y_3}
A_1
A_y
y
Π_1
A_1
A_{y_1}
Π_1

Рис. 1.6

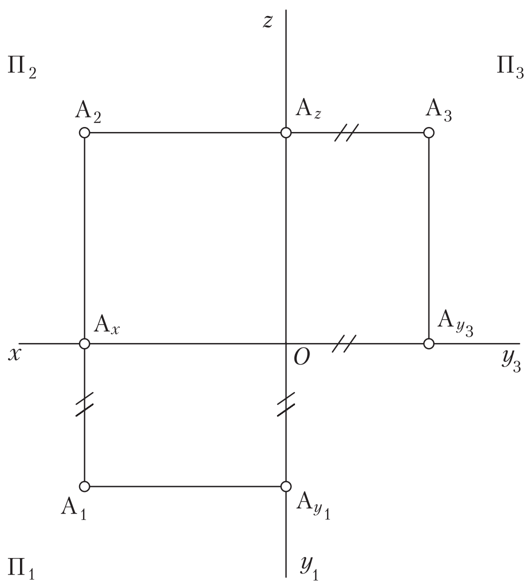

z
Π_2
Π_3
A_2
A_z
A_3
A_x
A_{y_3}
x
O
y_3
A_1
A_{y_1}
Π_1
y_1

Рис. 1.7

На комплексному рисунку можна зобразити будь-яку точку простору за її прямокутними координатами (пряма задача). Наприклад, на рис. 1.8 точка B (20, 30, 10).

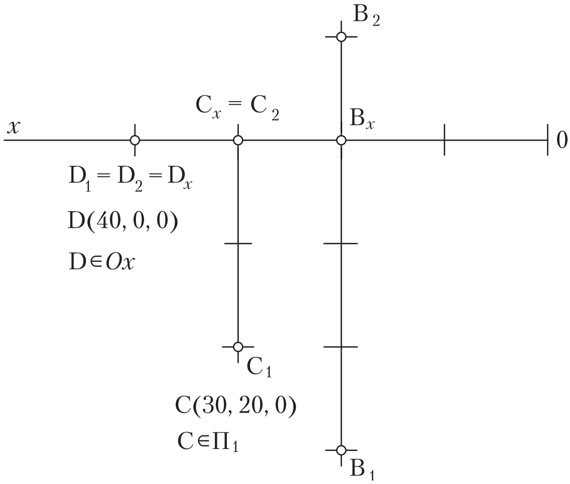


Рис. 1.8

За зображенням точки на комплексному рисунку можна визначити її координати й положення відносно заданої системи площин проекцій (обернена задача). Як приклад можна розглянути точки C, D на рис. 1.8.

За двома заданими проекціями точки можна побудувати її третю профільну проекцію. Для такої побудови використовують три конструктивні прийоми: координатний (рис. 1.9, *а*), проекційний (рис. 1.9, *б*), за допомогою сталої прямої *k* (рис. 1.9, *в*).

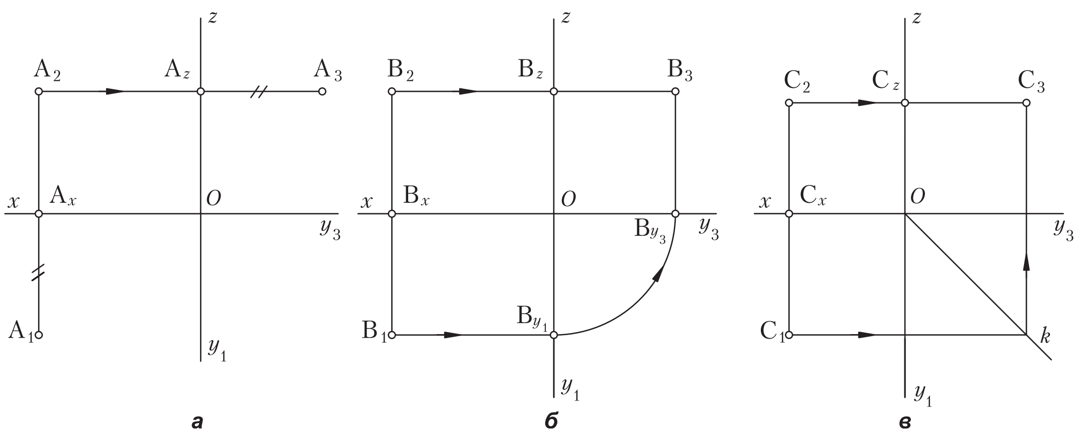


Рис. 1.9

Нами розглянуто лише одну чверть простору, яку обмежено площинами проекцій $П_1$ та $П_2$. Якщо продовжити площини $П_1$ та $П_2$ за вісь Ox (рис. 1.10), то вони поділять простір на чотири чверті. Після побудови комплексного рисунка точки, розташовані в іншій чверті простору, мають інше положення проекцій, ніж точки першої чверті (рис. 1.11).

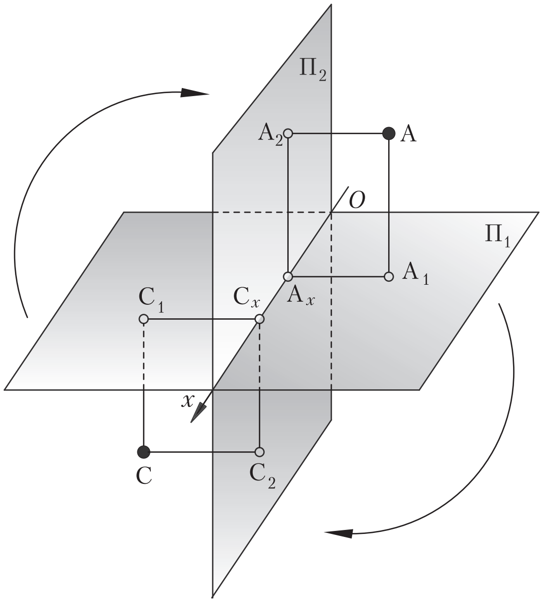


Рис. 1.10

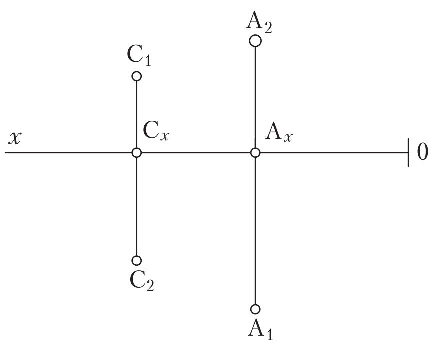


Рис. 1.11

1.2.2. Моделювання прямої

Визначником прямої є дві її точки. Наприклад, a(A, B) — пряма a, задана двома точками A та B. *Модель прямої* у прямокутній системі площин проекцій можна задати проекціями двох її точок (рис. 1.12). Таке зображення прямої називають *комплексним рисунком* прямої.

Пряму можна задати й допоміжним визначником b(A, s) — точкою A та напрямом s, який визначається на проекціях спрямуванням проекцій b_1, b_2 (рис. 1.13).

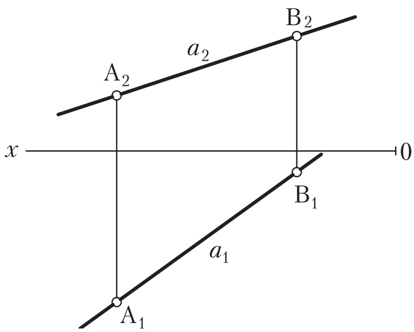


Рис. 1.12

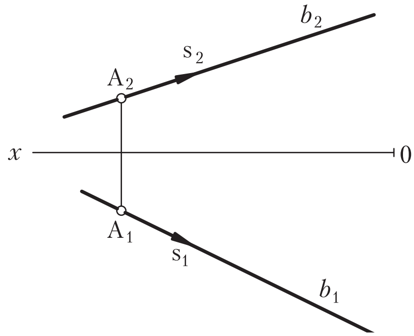


Рис. 1.13

Комплексний рисунок прямої дає змогу:

- побудувати її у прямокутній системі координат $Oxyz$, визначивши дві її точки $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$;
- визначити взаємне положення точок простору та прямої, двох прямих;
- визначити натуральну величину (н. в.) відрізка прямої.

Точка належить прямій, якщо її проекції належать до однойменних проекцій прямої. На рис. 1.14 точка A належить прямій a ($A \in a$), а точка B — не належить прямій a ($B \notin a$), бо лежить у третій чверті простору, а відповідна точка прямої K ($K \in a$) — у першій.

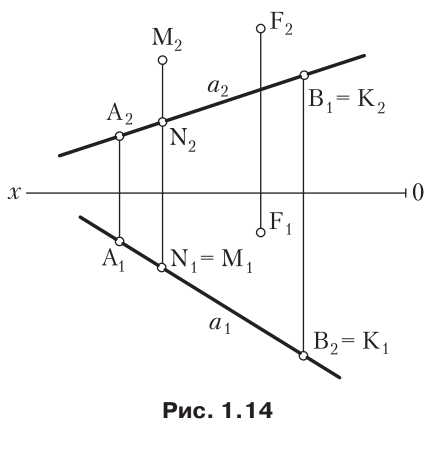


Рис. 1.14

Порівнявши координати точки простору та прямої, можна визначити їх взаємне положення. Наприклад, точка M має більшу координату z, ніж точка N, яка належить прямій a; отже, вона розташована *над* прямою. Подібно визначаємо, що точка F лежить *над* та *за* прямою.

Визначення натуральної величини відрізка прямої

Розглянемо відрізок AB прямої a у тривимірному просторі (рис. 1.15). Нехай A_1B_1 — горизонтальна проекція відрізка AB. Якщо перемістити відрізок A_1B_1 паралельно до себе так, щоб нове положення точки A'_1 збігалося з точкою A, то у прямокутному трикутнику ABB_0 довжина відрізка AB дорівнює довжині гіпотенузи, довжина катета AB_0 — довжині проекції A_1B_1 відрізка AB на горизонтальну площину проекцій, а довжина катета BB_0 є різницею відстаней кінцевих точок A та B відрізка AB від горизонтальної площини проекцій Π_1 — Δz. Кут між гіпотенузою AB та катетом AB_0 дорівнює куту нахилу відрізка AB до площини проекцій Π_1.

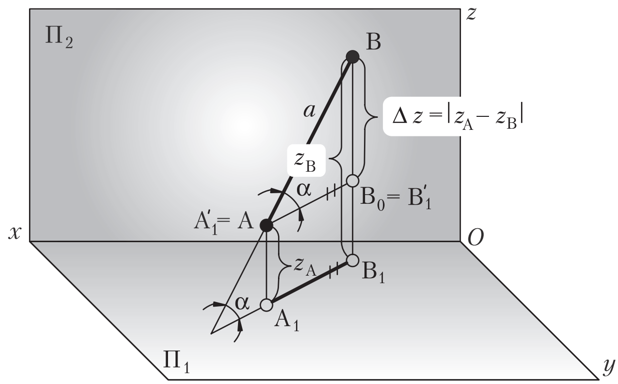


Рис. 1.15

Такий спосіб визначення натуральної величини відрізка прямої називають *правилом прямокутного трикутника*. Його застосування на комплексному рисунку проілюстровано на рис. 1.16.

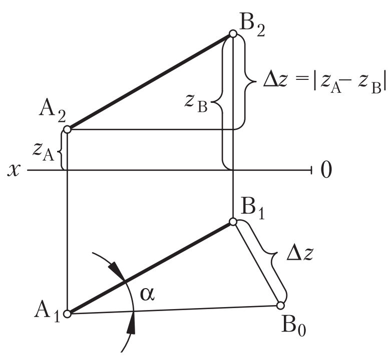


Рис. 1.16

Аналогічно можна визначити натуральну величину відрізка прямої на:

- фронтальній площині проекцій Π_2 (рис. 1.17), де різниця відстаней кінцевих точок відрізка від площини проекцій Π_2 — Δy, а кут нахилу до неї — β;
- профільній площині проекцій Π_3 (рис. 1.18), де різниця відстаней кінцевих точок відрізка від площини проекцій Π_3 — Δx, а кут нахилу до неї — γ.

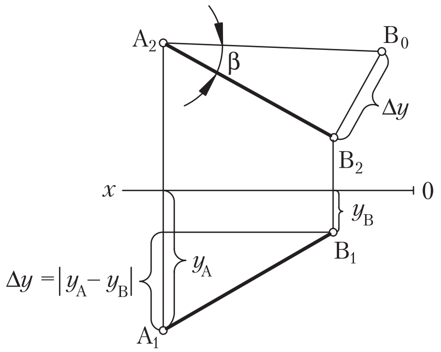


Рис. 1.17

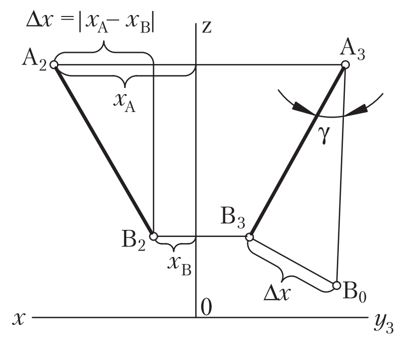


Рис. 1.18

Сліди прямої

Слідами прямої називають точки її перетину з площинами проекцій. Перетин з площиною Π_1 має назву *горизонтального сліду*, з Π_2 — *фронтального*, а з Π_3 — *профільного*. Це означає, що для кожного сліду одна з координат дорівнює нулю.

На рис. 1.19 зображено горизонтальний M та фронтальний N сліди прямої.

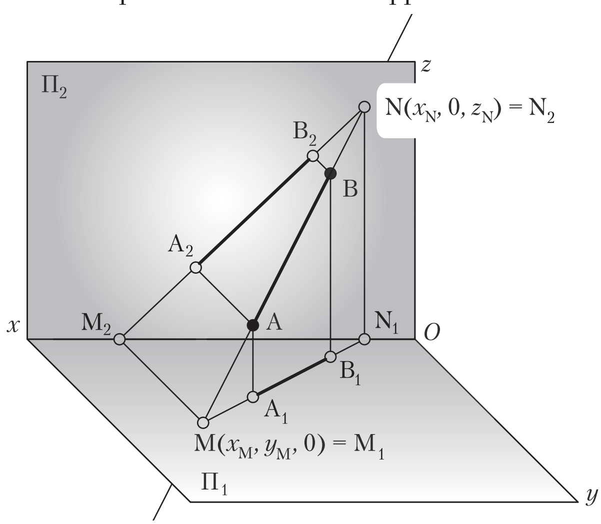


Рис. 1.19

На рис. 1.20 показано схему побудови слідів прямої *a*. Горизонтальний слід M має координату $z_M = 0$. Його фронтальна проекція визначається перетином фронтальної проекції прямої та осі *Ox*.

Фронтальний слід N має координату $y_N = 0$. Його горизонтальна проекція визначається перетином горизонтальної проекції прямої та осі *Ox*.

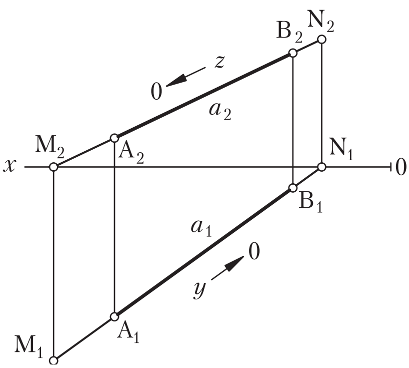


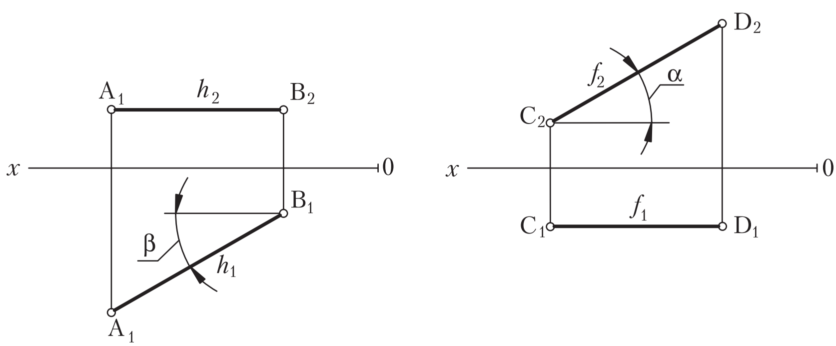
Рис. 1.20

Відносне положення прямої та площин проекцій

Пряму, довільно розташовану відносно площин проекцій, називають *прямою загального положення* (див. рис. 1.12–1.20).

Окремі положення займає пряма, паралельна хоча б до однієї з площин проекцій.

Пряму AB, паралельну до площини проекцій Π_1 (рис. 1.21, *а*), називають *горизонтальною* (*горизонталлю*). Таку пряму, як правило, позначають літерою *h*, а її відрізок та кут β її нахилу до площини проекцій Π_2 відображаються в натуральну величину на площині проекцій Π_1.



а *б*

Рис. 1.21

Пряму CD, паралельну до площини проекцій Π_2, називають *фронтальною* (*фронталлю*) і позначають літерою *f*. Її відрізок та кут α нахилу до площини проекцій Π_1 відображаються в натуральну величину на площині проекцій Π_2 (рис. 1.21, *б*).

Пряму EF, паралельну до площини проекцій Π_3, називають *профільною прямою* і позначають літерою *p*. Її відрізок та кути нахилу α до площини проекцій Π_1 і β до площини проекцій Π_2 відображаються на площині проекцій Π_3 у натуральну величину (рис. 1.22).

Прямі, перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають *проекціювальними* (рис. 1.23).

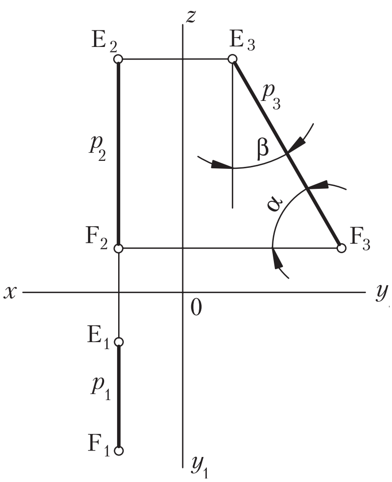


Рис. 1.22

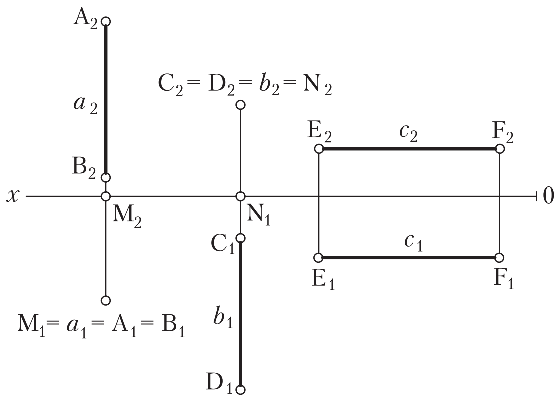


Рис. 1.23

Пряму *a*(A, B), перпендикулярну до Π_1, називають *горизонтально-проекціювальною*, пряму *b*(C, D), перпендикулярну до Π_2, — *фронтально-проекціювальною*, а пряму *c*(E, F), перпендикулярну до Π_3, — *профільно-проекціювальною*. Кожна з таких прямих проекціюється на перпендикулярну до неї площину точкою, яка водночас є проекцією і слідом (M, N) та має назву *сліду-проекції*. *Слід-проекція* має *збиральні* властивості, тобто кожна точка такої прямої проекціюється у її слід-проекцію.

Будь-які дві точки проекціювальної прямої називають *конкуруючими*. Це, наприклад, точки A та B прямої *a*, C та D прямої *b*, E та F прямої *c*. Із двох конкуруючих точок на сліді-проекції видима та, яка має більшу координату. Наприклад, на горизонтальній проекції прямої *a* видимою є точка A, на фронтальній проекції прямої *b* видима точка D, а на профільній проекції прямої *c* — точка E.

Взаємне положення двох прямих

Паралельність двох прямих відображається на комплексному рисунку паралельністю їх проекцій (на рис. 1.24 — $a \parallel b$), перетин двох прямих — спільною точкою, проекції якої розташовані на одній лінії зв'язку (на рис. 1.25 — $c \cap d = K$). Мимобіжні прямі не мають таких спільних точок (на рис. 1.26 — $m \cdot\!/ n$). Видимість точок двох мимобіжних прямих на проекціях у місцях перетину їх проекцій визначають за допомогою конкуруючих точок. На рис. 1.26 на горизонтальній проекції в точці перетину проекцій видима пряма n ($z_3 > z_4$), на фронтальній — в точці перетину проекцій пряма m ($y_2 > y_1$).

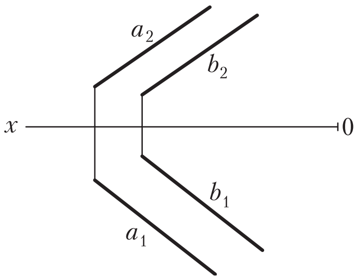


Рис. 1.24

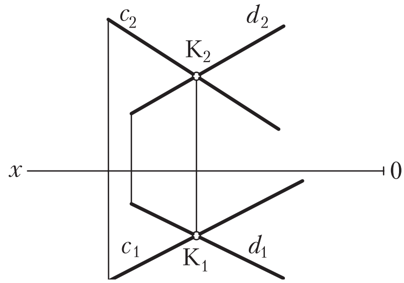


Рис. 1.25

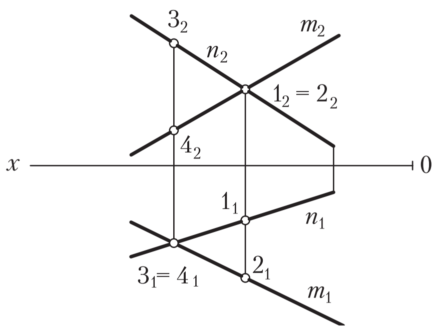


Рис. 1.26

1.2.3. Моделювання площини

Основним *визначником площини* є три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, Σ(A, B, C) — площина Σ, задана трьома точками A, B та C.

Модель площини у прямокутній системі площин проекцій можна задати проекціями трьох її точок (рис. 1.27). Таке зображення площини називають її *комплексним рисунком*.

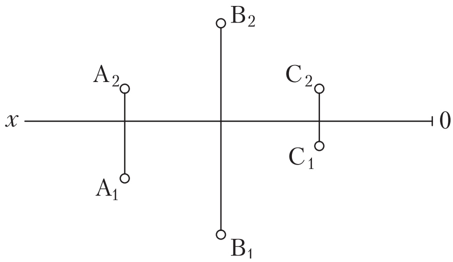


Рис. 1.27

Площину можна задати й допоміжними визначниками, утвореними об'єднанням точок основного визначника:

- прямою та точкою — $\Delta(a, \mathrm{A})$ (рис. 1.28);
- двома прямими, що перетинаються, — $\Gamma(a \cap b)$ (рис. 1.29);
- двома паралельними прямими — $\Sigma(a \parallel b)$ (рис. 1.30);
- будь-якою плоскою фігурою — $\Psi(\Delta\mathrm{ABC})$ (рис. 1.31).

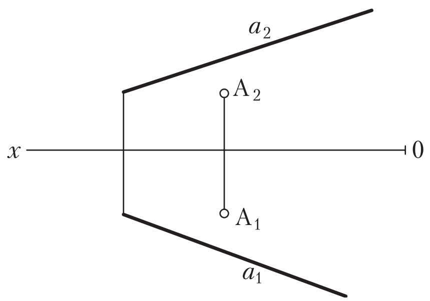


Рис. 1.28

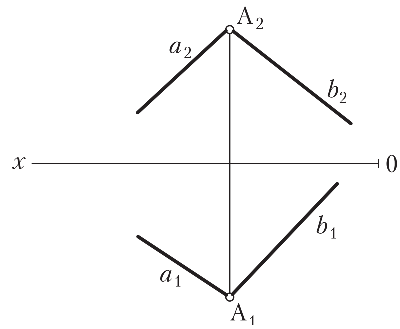


Рис. 1.29

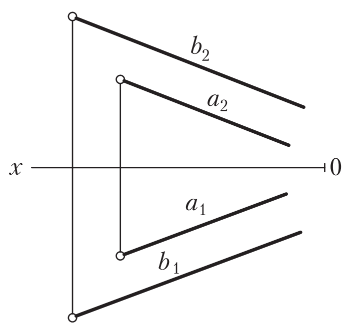


Рис. 1.30

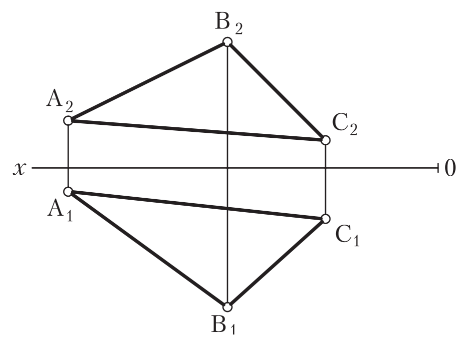


Рис. 1.31

Комплексний рисунок площини дає змогу:

- побудувати її у прямокутній системі координат *Oxyz*;
- визначити кути її нахилу до площин проекцій;
- визначити взаємне положення будь-якої точки простору та площини, прямої та площини, двох площин;
- визначити натуральну величину відсіку площини.

Відсіком площини називають її обмежену частину.

Пряма належить площині, якщо:

- має з нею дві спільні точки;
- має з нею спільну точку та паралельна до прямої цієї площини.

Прямі, які належать площині та паралельні до якоїсь із площин проекцій, називають *лініями рівня*. На рис. 1.32 побудовано горизонталь h площини $\Sigma(a \cap b)$, відстань (рівень) якої від площини Π_1 дорівнює z_h. Будь-яка інша горизонталь h' цієї площини паралельна до h. Рівень фронталі площини визначається координатою y_f, а профільної прямої площини — x_p.

Точка належить площині, якщо вона належить прямій цієї площини (рис. 1.33 — $D \in \Sigma(\Delta ABC)$).

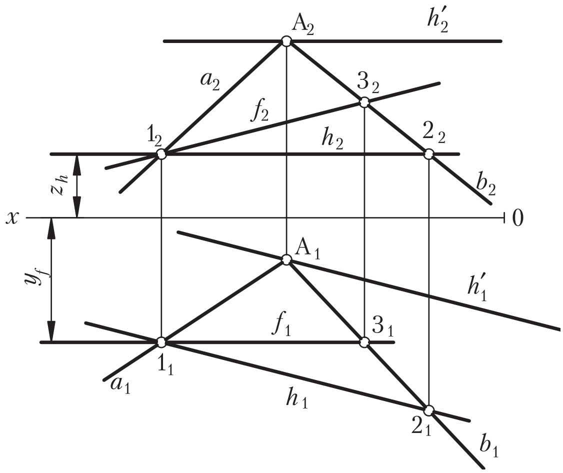


Рис. 1.32

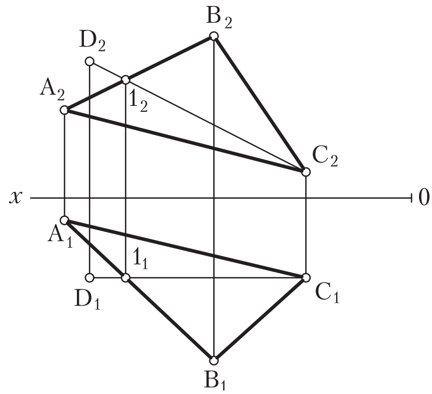


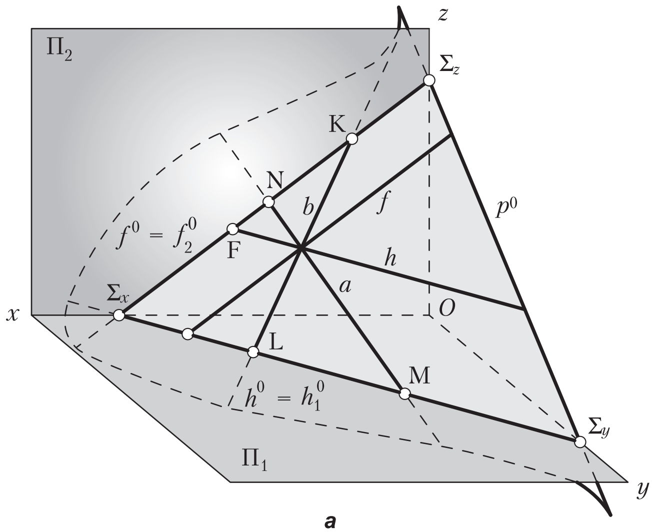
Рис. 1.33

Слідами площини називають лінії її перетину з площинами проекцій (рис. 1.34, *а*, *б*). Перетин із площиною Π_1 має назву *горизонтального сліду*, з Π_2 — *фронтального*, з Π_3 — *профільного*. Це означає, що для кожного сліду одна з координат усіх його точок однакова та дорівнює нулю. Інакше кажучи, кожний слід є нульовою лінією рівня площини ($z_{h^0} = 0$, $y_{f^0} = 0$, $x_{p^0} = 0$). Точки перетину слідів називають точками *збігу слідів* (Σ_x, Σ_y, Σ_z).

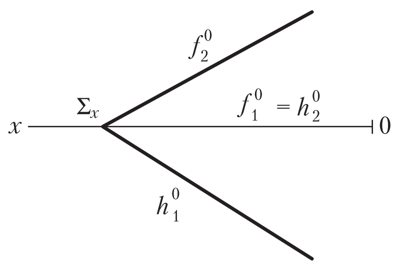
Як будь-які прямі площини, її сліди на комплексному рисунку можна побудувати:

- за двома точками — слідами двох прямих, що належать площині; наприклад, на рис. 1.34, *а* фронтальний слід f^0 визначається слідами N та K прямих a та b площини;
- за точкою (слідом будь-якої прямої) та напрямом — паралельністю до будь-якої лінії рівня площини; наприклад, на рис. 1.34, *а* нульову фронталь f^0 можна побудувати як пряму, паралельну до фронталі f площини й таку, що проходить через слід F прямої h.

На рис. 1.35 проілюстровано побудову слідів площини $\Sigma(h \cap f)$: фронтального f^0 за слідом F горизонталі h та паралельного до фронталі f площини; горизонтального h^0 за точкою збігу слідів Σ_x та паралельного до горизонталі площини h.



а



б

Рис. 1.34

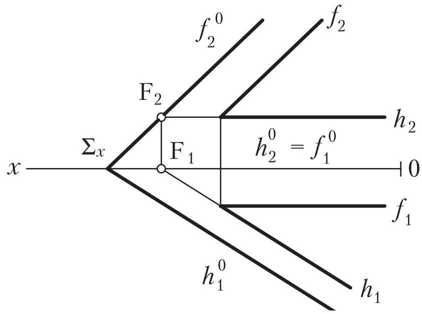


Рис. 1.35

За положенням відносно площин проекцій площини поділяють на такі:

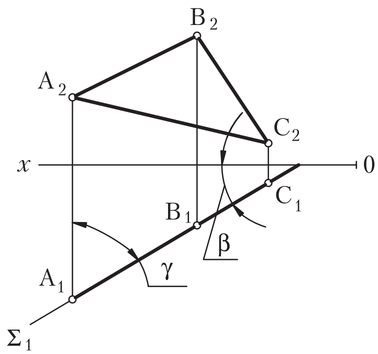
- *площини загального положення*, якщо площина довільно розташована відносно площин проекцій (див. рис. 1.27–1.35);

- *площини окремого положення*, коли площина перпендикулярна хоча б до однієї з площин проекцій.

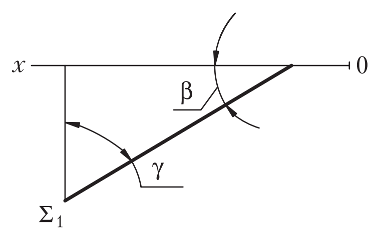
Площину, перпендикулярну до однієї з площин проекцій, називають *проекціювальною*. Відповідно до площини проекцій проекціювальні площини можуть бути:

- *горизонтально-проекціювальними* (на рис. 1.36, *а* — $\Sigma(\Delta ABC)\perp\Pi_1$, на рис. 1.36, *б* — $\Sigma(\Sigma_1)\perp\Pi_1$);
- *фронтально-проекціювальними* (на рис. 1.37 — $\Delta(a \parallel b)\perp\Pi_2$);
- *профільно-проекціювальними* (на рис. 1.38 — $\Gamma(a \cap b)\perp\Pi_3$).

Кожна з проекціювальних площин утворює на перпендикулярній до неї площині проекцій *слід-проекцію*. Слід-проекція має збиральні властивості. Це означає, що всі елементи площини проекціюються на слід-проекцію. Слід-проекція повністю визначає положення площини у просторі — перпендикулярність до однієї площини проекцій та кути нахилу до двох інших. Будь-яку проекціювальну площину можна задати лише слідом-проекцією (див. рис. 1.36, *б*).



а



б

Рис. 1.36

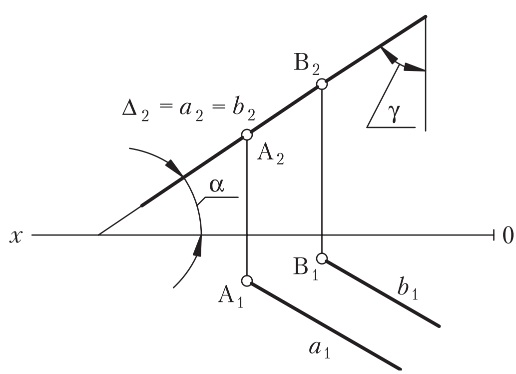


Рис. 1.37

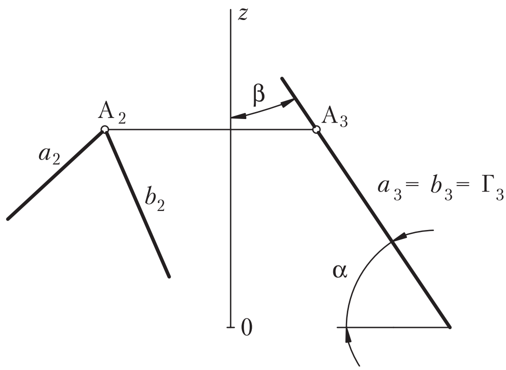


Рис. 1.38

Площину, паралельну до площини проекцій, називають *площиною рівня*. Одна з координат усіх точок такої площини однакова й дорівнює відстані (рівню) площини від паралельної до неї площини проекцій. На цю площину відсіки площини рівня проекціюються у натуральну величину. Розрізняють *горизонтальні площини рівня*, або *горизонтальні площини* (рис. 1.39), *фронтальні площини рівня*, або *фронтальні площини* (рис. 1.40), *профільні площини рівня*, або *профільні площини* (рис. 1.41).

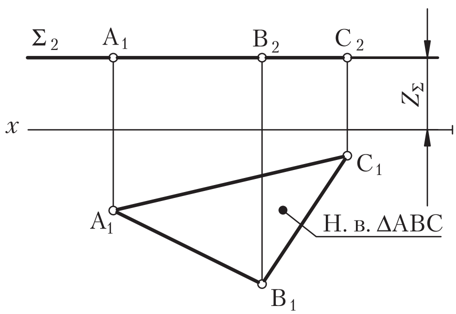


Рис. 1.39

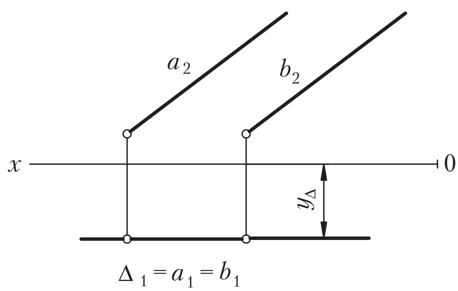


Рис. 1.40

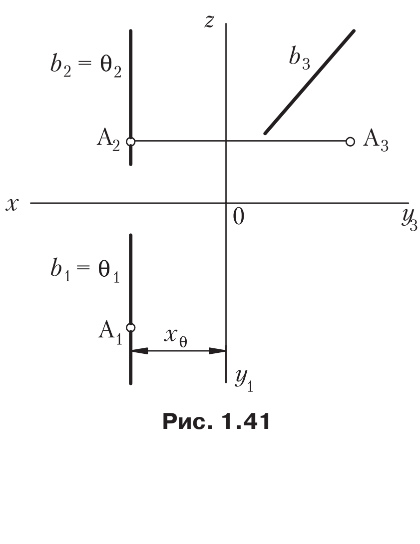


Рис. 1.41

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає нарисна геометрія?
2. Який основний метод нарисної геометрії?
3. Коли зображення об'єкта на площині вважають повним та метрично визначеним?
4. Як можна отримати зображення точки на площині?
5. Як моделюється точка в системі ортогональних проекцій? Що таке комплексний рисунок точки?
6. Що таке визначник прямої, площини? Навести основні визначники прямої, площини.
7. Як визначити належність точки до площини, а також прямої до площини?
8. Як визначити натуральну величину відрізка прямої?
9. Як прямі та площини поділяються за положенням відносно площин проекцій?